CURSO DE CÁLCULO - MÓDULO 2

LIMITES

SUMÁRIO

Unidade 1- Sequências Reais e seus Limites

1.1- Introdução

O conceito de **limite** é fundamental no **cálculo diferencial**, um campo da Matemática que iniciou – se no século XVII sendo bastante produtivo em resultados e aplicações em várias áreas do conhecimento, como a Física, a Engenharia, a Economia, a Geologia, a Astronomia, a Biologia, entre outras.

Com o desenvolvimento do cálculo diferencial, matemáticos como Huygens (1629 – 1695), Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716) tiveram papel marcante. Buscando aperfeiçoar a conceituação de limites, tiveram destaques as contribuições de d' Alembert (1717 – 1783) e de Cauchy (1789 – 1857).

Na Matemática atual, as definições de convergência, divergência, continuidade, derivada e integral estão baseadas no conceito de limite. A falta de compreensão da noção de limite, no passado, levou a vários paradoxos, sendo os mais antigos devidos a Zenão de Eleia.

A primeira vez que limites foram necessários foi para a resolução dos quatro paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.). No primeiro paradoxo, a *Dicotomia*, Zenão colocou um objeto se movendo uma distância finita entre dois pontos fixos em uma série infinita de intervalos de tempo (o tempo necessário para se mover metade da distância, em seguida o tempo necessário para se mover metade da distância restante, etc.) durante o qual o movimento deve ocorrer.

A conclusão surpreendente de Zenão foi que o movimento era impossível! Aristóteles (384 – 322 a.C.) tentou refutar os paradoxos de Zenão com argumentos filosóficos. Em matemática, uma aplicação cuidadosa do conceito de limite resolverá as questões levantadas pelos paradoxos de Zenão.

Para suas demonstrações rigorosas das fórmulas para certas áreas e volumes, Arquimedes (287– 212 a.C.) encontrou várias *séries infinitas* – somas que contêm um número infinito de termos. Não possuindo o conceito de limite propriamente dito, Arquimedes inventou argumentos muito engenhosos chamados de *redução ao absurdo duplo*, que, na verdade, incorporam alguns detalhes técnicos do que agora chamamos de limites.

Um dos problemas propostos por Zenão era equivalente ao seguinte:

Imagine que um atleta deva correr, em linha reta, de um ponto a outro distando 1km. Quando o atleta chegar na metade do caminho, ainda faltarão 500 m para chegar ao seu destino. Quando ele percorrer a metade dessa metade do caminho, ainda faltarão 250 m e quando percorrer a metade dessa distância ainda faltarão 125 m e, assim, sucessivamente. Repetindo esse raciocínio indefinidamente, argumentava Zenão, o atleta nunca chegaria ao destino, pois não importando a distância percorrida, sempre restaria alguma distância a ser percorrida.

Observe que a distância que separa o atleta de sua meta se tornará tão próxima de zero quanto ele quiser, sendo necessário para isso que ele repita os deslocamentos descritos anteriormente um número suficientemente grande de vezes.

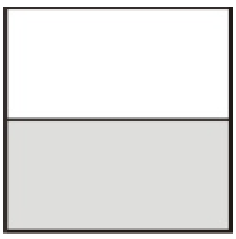
O paradoxo de Zenão somente se sustentava porque não levava em consideração o fator tempo, implícito em qualquer movimento, e o fato de que, ao somar sucessivamente as distâncias percorridas, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ o resultado é limitado por 1 e dele se aproxima o quanto desejarmos.

1.2- Noção Intuitiva de Limites

Exemplos:

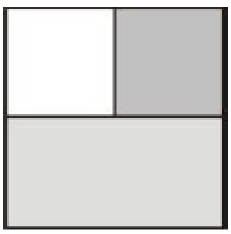
a) Considerando uma região quadrada de área igual a 1.

Inicialmente vamos colorir a metade do quadrado.



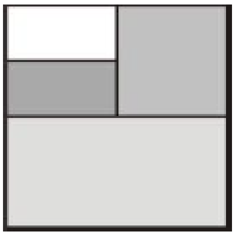
Parte colorida = $\frac{1}{2}$ da figura

Após, vamos pintar a metade da região e mais metade do que restou.



Parte colorida = $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ da figura

No próximo , vamos colorir o que havia sido colorido e mais metade do que restou:



Parte colorida $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ da figura

E assim, sucessivamente e indefinidamente, a área da região colorida resultante vai tendendo a 1. Dizemos, então, que o **limite** desse desenvolvimento, quando o número de momentos tende ao infinito, é colorir a figura toda, ou seja, obter uma área colorida igual a 1.

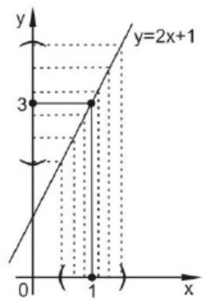
b) Seja a função f(x) = 2x + 1. Vamos associar valores de x que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de y.

Pela direita

x	$y = 2x + 1$
1,5	4
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

Pela esquerda

x	$y = 2x + 1$
0,5	2
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98



Observamos que quando x tende para 1, y tende para 3 e o limite da função é 3.

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

De maneira geral, escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = b$, se, quando x se aproxima de a (x →a), f (x) se aproxima de b (f(x) →b).

c) Estudo do comportamento de uma função f nas proximidades de um ponto. Seja

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1.$$

Para x diferente de 1, f pode ser simplificada e reescrita de forma mais simples.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \to f(x) = x+1, x \neq 1.$$

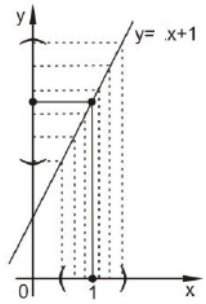
Analisando o comportamento dessa função nas vizinhanças do ponto x = 1, pois esse ponto não pertence ao domínio de f.

Pela direita

x	$y = x+1$
1,5	2,5
1,3	2,3
1,1	2,1
1,05	2,05
1,02	2,02
1,01	2,01

Pela esquerda

x	$y = x+1$
0,5	1,5
0,7	1,7
0,9	1,9
0,95	1,95
0,98	1,98
0,99	1,99



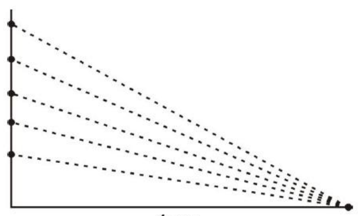
Logo quando nos aproximamos de x = 1, pela esquerda e pela direita, o valor dessa função se aproxima de 2. Assim, dizemos que

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(x+1) = 1+1 = 2$$

Observa-se que a noção de limite é fácil de ser captada intuitivamente. Por exemplo, imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente quando está sendo aquecida. Considerando x o comprimento do lado, a área da placa é dada por A = x^2. Quanto mais x se aproxima de 3 cm, a área A tende a 9 cm^2; ou seja, quando x se aproxima de 3, x^2 se aproxima de 9 como um limite. Simbolicamente, escreve – se $\lim_{x\to3} x^2 = 9$, em que a notação " x → 3" indica que x tende a 3 e " lim " significa " o limite de " .

Exercícios:

1- Considere a região do plano limitada pelo triângulo retângulo de base fixa e igual a 4cm. Faça a altura ir se aproximando de 3, mas sem nunca atingir 3, isto é, faça a altura tender a 3. Complete a tabela dada e verifique para que valor esteja tendendo a área dessa região.



Base	Altura	Área
4	1	

4	1,5	
4	2,0	
4	2,5	
4	2,9	
4	2,999	
4	2,999999	

$$A_{triângulo=\frac{b.h}{2}}$$

2- O que ocorre, no limite, com a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo se mantivermos a medida de um cateto constante e a do outro cateto for diminuindo, tendendo a 0 (mas nunca 0).

Hipotenusa ² = cateto² + cateto²

3- Considere a sequência $$a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Explicite essa sequência, escrevendo os valores para n=1,2,3,4,5,...,10,...,100, ..., 1000, ...

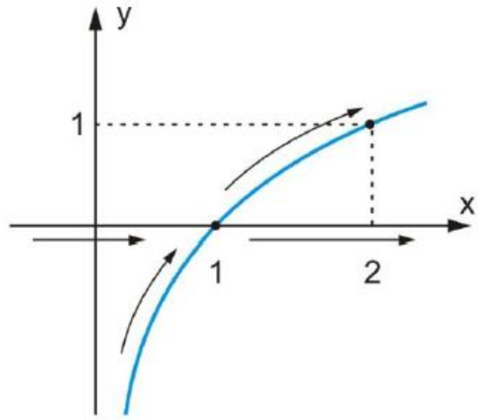
b) Escreva na forma de número decimal os temos da sequência do item anterior.

c) Para que valor está tendendo essa sequência, quando n tende para o infinito?

4- Considere o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$ e responda.

a) À medida que x tende a 1, f(x) tende para que valor?

b) À medida que x tende para um valor cada vez maior, f(x) tende para quanto?



x tendendo a um valor cada vez maior

Gabarito

1) A área tende a 6 quando a altura tende a 3.

2) Se h tende a 0, então a tende a b.

3) a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ..., \frac{10}{11}, ..., \frac{100}{101}, ..., \frac{1000}{1001}, ...$

b) 0,5;0,66...;0,75;0,8;0,833...;...;0,9090...;...;0,990099...;...;0,99900099....

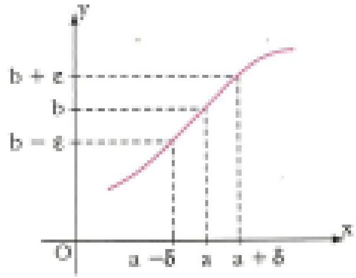
c) Tende a 1.

4) a) 0   b) infinito.

1.3- Definição

Considerando uma função f(x), definida num intervalo I, temos que o limite de f(x), quando x tende a a, é o número b, se para todo ε > 0 , existir, em correspondência , um número δ > 0, de modo que x ≠ a e a – δ < x < a + δ → b – ε < f(x) < b + ε. Assim:

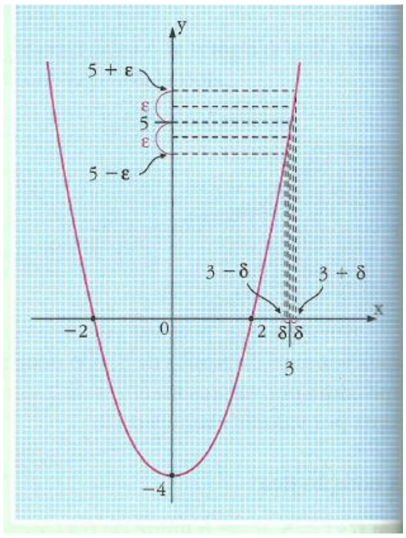
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$



Exemplos:

a) Considere a função f: R → R, tal que f(x) = x^2 – 4 e o seu gráfico.

x	y
2,5	2,25
2,6	2,76
2,7	3,29
2,8	3,84
2,9	4,41
3,2	6,24
3,1	5,61



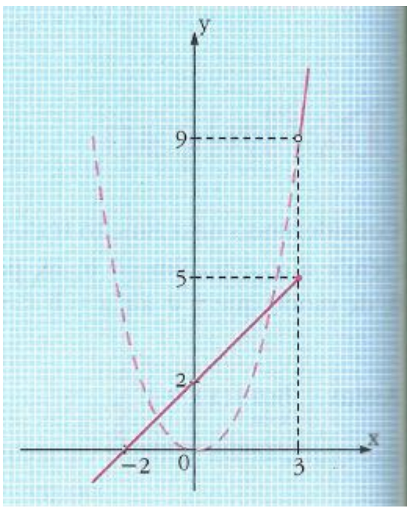
Sendo que o domínio de f(x) é o conjunto dos números reais, que f(3)=5 e que os valores de f(x) se aproximam de 5 (conforme mostra a tabela), para valores de x próximos de 3, então

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5.$$

b) Considere a função f: R → R, tal que:

$f(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, se\ x > 3 \\ f(x) = x + 2, se\ x\ \leq 3 \end{cases}$ e o seu gráfico cartesiano.

x	y
2,7	4,7
2,8	4,8
2,9	4,9
3,3	10,89
3,2	10,24
3,1	9,61



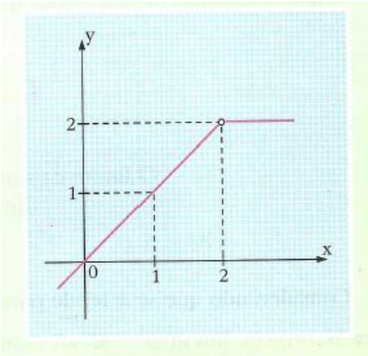
Temos que:

- Quando x tende a 3, com valores menores de 3, ou seja, pela esquerda, o limite é 5. $\lim_{x \to 3-} f(x) = 5$
- Quando x tende a 3, com valores maiores de, ou seja, pela direita, o limite é 9. $\lim_{x \to 3+} f(x) = 9$

Nesse caso, não existe o limite de f(x) quando x tende a 3, embora f(x) seja definida para x = 3. Para que o limite de f(x) exista, é necessário que f(x) se aproxime de um mesmo número, seja pela esquerda ou pela direita.

c) Considerando a função f: R → R, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x, se\ x < 2 \\ 2\ se\ x > 2 \end{cases}$$



Observe que:

- Quando x tende a 2 para valores menores que 2, isto é, pela esquerda, o limite de f(x) é 2. $\lim_{x \to 2-} f(x) = 2$
- Quando x tende a 2 para valores maiores que 2, ou seja, pela direita, o limite de f(x) é 2. $\lim_{x \to 2+} f(x) = 2$

  Nesse caso , existe o limite de f(x), quando x tende a 2, mesmo que a função não esteja definida para x = 2.

1.4- Sequências de Números Reais

A experiência fictícia de Zenão gera uma infinidade de números

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots.$$

que correspondem aos pontos de imagem da função x : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por x(n)= $\frac{1}{2^n}$. Tal fato nos leva ao conceito fundamental de sequência juntamente com as propriedades a ele relacionadas.

Definição 1: Uma sequência de números reais é uma função x : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real x_n = x(n), chamado n-ésimo termo da sequência.

Denota-se por (x_1, x_2, x_3, ... , x_n, ...), ou por (x_n), com n $\in \mathbb{N}$, ou simplesmente, por (x_n), a sequência x : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. É relevante fazer a distinção entre o conjunto formado pelos termos da sequência e a sequência propriamente dita. De fato, a sequência (1,1,1, ...) tem como conjunto de seus termos o conjunto unitário X = { 1 }. Dessa forma, a função x é a função constante definida por x_n = 1, para todo n $\in \mathbb{N}$. Chama-se sequência constante a toda sequência cujos termos são iguais entre si.

Exemplos de sequências:

a) $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$
b) $\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$
c) $(n) = (1,2,3,4,5, \dots, n, \dots)$
d) $(2^n) = (2,4,8,16, \dots, 2^n, \dots)$
e) $\left(\frac{1}{n^n}\right) = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^4}, \dots, \frac{1}{n^n}, \dots\right)$

Observação: As sequências são casos particulares de funções reais, assim elas podem se somadas, subtraídas, multiplicadas ou divididas. Considerando as sequências (x_n) e (y_n) pode-se formar as sequências ($x_n \pm y_n$), ($x_n . y_n$) e $\left(\frac{\text{xn}}{\text{yn}}\right)$, no quociente $y_n \neq 0$.

Definição 2: Uma sequência (x_n) é dita limitada, se existe c > 0 tal que |x | < c, para todo n $\in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, pode-se dizer que ela é ilimitada.

Definição 3: Uma sequência (x_n) será dita decrescente se $x_{n+1} < x_n$ para todo n $\in \mathbb{N}$. Uma sequência será não crescente se $x_{n+1} \leq x_n$, para todo n $\in \mathbb{N}$.

Por exemplo, a sequência $\left(1,,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right)$ é classificada como não crescente, pois tem a propriedade $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n , mas não pode ser decrescente, pois não satisfaz à condição $x_{n+1} < x_n$ para todo n.

Definição 4: Uma sequência (x_n) será crescente se $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência será não decrescente se $x_{n+1} \geq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação: As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes, não crescentes são denominadas de sequências monótonas.

Exemplos:

a) $(1,2,3,4,5,\ldots,n,\ldots)$ sequência crescente

b) $(2,4,8,16,\ldots,2^n,\ldots)$ sequência crescente

c) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)$ sequência decrescente

d) $(-1,-2,-3,-4,-5,\ldots,-n,\ldots)$ sequência decrescente

e) (1,0, 1,0, 1,0, 1,0,...) sequência não monótona

Definição 5: Subsequência

Dada uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ de números reais, uma subsequência de (x_n) é a restrição da função x que define (x_n) a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$. Denota-se a subsequência por $(x_n)_{n \in N1}$, ou $(x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \ldots < x_{nk} < \ldots)$ ou ainda $(x_{ni})_{i \in N}$.

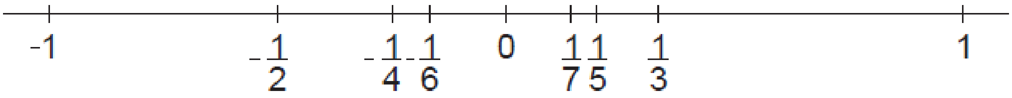
1.5- Limites de Sequências de Números Reais

Observa-se na argumentação de Zenão que o atleta nunca chegaria a sua meta, embora fique próximo dela quanto quiser, ou seja, a distância que separa o atleta da meta se torna tão próxima de zero quanto ele desejar.

Exemplos

1- Observe a sequência da qual representamos alguns termos na reta numérica.

$$(x_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \cdots\right)$$



Todos os elementos dessa sequência são diferentes de zero, sendo positivos os elementos correspondentes a n ímpar (1, 1/3, 1/5, ...), e negativos os correspondentes a n par (-1/2, -1/4, -1/6, ...).

2- Considere a sequência:

$$(x_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots \frac{n-1}{n}, \cdots\right).$$

Observa-se que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo [0,1]. Além disso $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, dessa forma segue-se que a sequência x_n é crescente, pois à medida que n cresce, subtrai-se de 1 um número cada vez menor.

Exercícios

1- Mostre que as sequências abaixo são limitadas e monótonas. Descreva o tipo de monoticidade de cada uma delas.

a) $x_n \; = \frac{2n-1}{n}$

b) $x_n \; = 1 + \frac{1}{3^n}$

c) $x_n \; = \frac{1}{n^2}$

Gabarito

$a)\; x_n = \frac{2n-1}{n} = \frac{2n}{n} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$. $x_1 = 1$ e para valores maiores de n estaremos subtraindo de 2, valores cada vez menores, logo $x_n \in [1,2]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, x_n é limitado.

Rascunho: $x_1 \; < x_2 \; \rightarrow x_{n+1} > \; x_n \; \rightarrow 2 - \frac{1}{n+1} > \; 2 - \frac{1}{n}$

$$-\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n} \to \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Monotonicidade de x_n

Sabendo que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ para todo n natural, temos:

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \to -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n} \to 2 - \frac{1}{n+1} > 2 - \frac{1}{n} \to x_{n+1} > x_n$.

Logo, x_n é monótona crescente.

Ou

a) $x_n = \frac{2n-1}{n} = \frac{2n}{n} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

$$\left(\frac{2n-1}{n}\right) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots\right)$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_3 = 1 + \frac{2}{3}$, $x_4 = 1 + \frac{3}{4}$

A sequência é monótona crescente, $x_{n+1} > x_n$. Quando n é grande, $\frac{1}{n}$ é pequena, de forma que $2 - \frac{1}{n}$ se aproxima de 2.

$x \in [1,2] \subset (-3 , 3)$. Logo, existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, assim x_n é limitada.

b) $x_n = 1 + \frac{1}{3^n}$

$$\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, \frac{28}{27}, \dots, 1 + \frac{1}{3^n}, \dots\right)$$

A sequência é monótona decrescente, $x_{n+1} < x_n$. Quando n é grande, $\frac{1}{3^n}$ se aproxima de 0, assim $1 + \frac{1}{3^n}$ se aproxima de 1.

c) $x_n = \frac{1}{n^2}$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\right)$$

A sequência é monótona decrescente, $x_{n+1} < x_n$. Para n grande, $\frac{1}{n^2}$ se aproxima de 0, assim $x \in [0, 1] \subset (-2 , 2)$. Logo, existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, portanto x_n é limitada.

2) Ache os limites das sequências $(x_n)_{n \geq 1}$ abaixo.

a) $x_n = \frac{2n-1}{n}$

b) $x_n \ = 1 + \frac{1}{3^n}$

c) $x_n = \frac{1}{n^2}$

d) $x_n = \frac{n^2+1}{3n^2}$

Gabarito

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} \to \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}\right) \to \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) \to \lim_{n\to\infty}(2-0) = 2$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \to \lim_{n\to\infty}(1+0) = 1$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{3n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+0}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Unidade 2- Limites de Funções

2.1- Conceito de Limite de uma Função

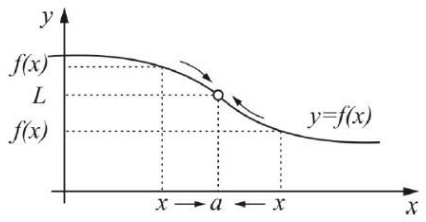
O conceito básico sobre o qual o Cálculo se sustenta é o de limite de função. O desenvolvimento teórico de grande parte do Cálculo foi feito utilizando a noção de limite. Por exemplo, as definições de derivada e de integral definida, independente de seu significado geométrico ou físico são estabelecidas usando limites.

2.1.1- Definição Informal

Considere uma função *f* definida para valores de *x* próximos de um ponto *a* sobre o eixo *x*, mas não necessariamente definida no próprio ponto *a*. Suponha que exista um número real *L* com a propriedade de que *f(x)* fica cada vez mais próximo de *L*, quando *x* se aproxima mais de *a*. Diz-se então que *L* é o limite de *f* quando *x* tende para *a*, que simbolicamente expressa-se por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Obs.: Se não existe um número L com essa propriedade diz-se que não existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Notação	Significação Intuitiva	Interpretação Gráfica
$\lim_{x \to a} f(x) = L$	Podemos tomar f(x) tão próximo de L quanto quisermos, escolhendo x suficientemente próximo de a e x ≠ a.	

O conceito de limites de funções tem grande utilidade na determinação do comportamento de funções nas vizinhanças de um ponto fora do domínio, no comportamento de funções quando x aumenta muito (tende ao mais infinito) ou diminui muito (tende ao menos infinito).

Exemplos:

a) Verificar como a função $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$ se comporta para valores próximos de 2.

Determinação do domínio:

3x – 6 ≠ 0 → 3x ≠ 6 → x ≠ 2, logo para x = 2, a função não está definida.

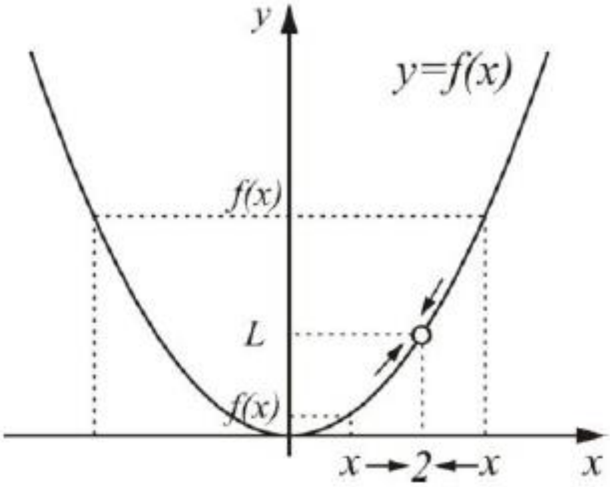
Verificando para valores próximos de 2.

x	$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$	x	$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$
1,9	1,20333333	2,1	1,47000000
1,99	1,32003333	2,01	1,34670000
1,999	1,33200033	2,001	1,33466700
1,9999	1,33320000	2,0001	1,33346667
1,99999	1,33332000	2,00001	1,33334667
1,999999	1,33333200	2,000001	1,33333467

Simplificação da função

$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{3x-6} = \frac{x^2(x-2)}{3(x-2)} = \frac{x^2}{3}$. logo a função $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{3x-6} = \frac{x^2}{3}$

Verificação gráfica



Pode-se concluir que

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-2x^2}{3x-6}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

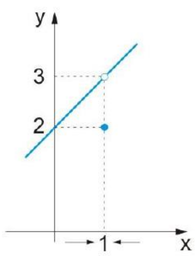
b) Verifique como a função abaixo se comporta para valores próximos de 1.

$$g(x)\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} \text{se } x \neq 1 \\ 2 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

Simplificação

$\frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x + 2$

Análise gráfica



Observa-se que quando x tende a 1 o valor de y tende a 3, ou seja, $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$, pois o que importa é o comportamento da função quando se aproxima de 1 e não o que ocorre com a função quando x = 1.

Exercícios

1) Ache o valor de cada limite, caso exista, usando valores próximos:

a) $\lim_{x\to 3}(x^2+2)$ b) $\lim_{x\to 4} x$ c) $\lim_{x\to 100} 7$ d) $\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{2x+1}$ e) $\lim_{x\to 5}\frac{x+2}{x-4}$

f) $\lim_{x\to -2}(3x-1)$ g) $\lim_{x\to -3}(-x)$ h) $\lim_{x\to 7}100$ i) $\lim_{x\to -1}\pi$ j) $\lim_{x\to \pi}(-1)$

2) Use a simplificação algébrica para achar o limite, caso exista, utilizando valores próximos:

a) $\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x+3)}$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+3)}{x+1}$ c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ e) $\lim_{z\to -2}\frac{z-4}{z^2-2z-8}$ f) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-6x^2+x-3}{x-3}$

g) $\lim_{r\to 1}\frac{r^2-r}{r^2+r-2}$ h) $\lim_{r\to -3}\frac{r^2+2r-3}{r^2+7r+12}$ i) $\lim_{h\to -2}\frac{h^3+8}{h+2}$

j) $\lim_{h\to -2}\frac{h^3-8}{h-2}$

Gabarito

1) a) 11	b) 4	c) 7	d) 5/3	e) 7
f) –7	g) 3	h) 100	i) π	j) –1
2) a) 7/2	b) 4	c) 4	d) 2x	e) Não existe
f) 19	g) 1/3	h) –4	i) 12	j) 4

2.1.2- Definição de Limite

Diz-se que o limite da função f(x) quando x tende a “a” é igual ao número real L se, e somente se, os números reais f(x) para os infinitos valores de x permanecem próximos a L, sempre que x estiver muito próximo de “a”.

Indica-se $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

2.2- Propriedades dos Limites de Funções

Ao definir limite, chegou-se à expressão $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Sejam as funções f(x) e g(x), definidas em certo domínio D, tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$.

A seguir estão descritas algumas propriedades que auxiliam à obtenção de b.

1) Limite de uma constante.

O limite de uma constante é a própria constante.

$$\lim_{x\to a} k = k$$

Exemplo: $\lim_{x\to 2} 3 = 3$.

2) Limite da soma.

O limite da soma de duas funções é a soma dos limites dessas funções.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M}$$

Exemplo:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1}[x^3 + 3x^2] = \lim_{x\to 1} x^3 + \lim_{x\to 1} 3x^2 = 1 + 3 = 4}$$

3) Limite da diferença.

O limite da diferença de duas funções é a diferença dos limites dessas funções.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M}$$

Exemplo:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}[x^3 - 7x^2] = \lim_{x\to 0} x^3 - \lim_{x\to 0} 7x^2 = 0 - 0 = 0}$$

4) Limite do produto

O limite do produto de duas funções é o produto dos limites dessas funções.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(x). g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = L. M}$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 3} 4x^2 = \lim_{x\to 3} 4 \, . \lim_{x\to 3} x^2 = 4.9 = 36$$

5) Limite do quociente

O limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções, desde que o denominador seja diferente de zero.

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x+3}{x+4}\right] = \frac{\lim_{x \to 2}(x+3)}{\lim_{x \to 2}(x+4)} = \frac{2+3}{2+4} = \frac{5}{6}$$

6) Limite de uma potência

O limite de uma potência enésima de uma função é igual à potência enésima do limite.

$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = L^n$, $n \in \mathbb{N}$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1}(x^2+3)^2 = \left(\lim_{x \to 1}(x^2+3)\right)^2 = (1+3)^2 = 16$$

7) Limite da raiz

O limite da raiz enésima de uma função é igual à raiz enésima do limite dessa função.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Obs.: L > 0 e n é um número natural ou se L≤ 0 e n é um natural ímpar.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[5]{3x^4} = \sqrt[5]{\lim_{x \to 2} 3x^4} = \sqrt[5]{48}$$

Exercícios

1- Calcule os limites utilizando as propriedades estudadas para justificar os cálculos**.**

a) $\lim_{x\to 4}(5x^2-2x+3)$ b) $\lim_{x\to 8}(1+\sqrt[3]{x})(2-6x^2+x^3)$ c) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$

d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$ e) $\lim_{t\to -1}(t^2+1)^3(t+3)^5$ f) $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}$

g) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3-4x^2+5x-x}$ h) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-5x^5}{x-1}$ i) $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{x^5-x^4+x^3-x^2}{2-x}\right)^2$

j) $\lim_{x\to -1}\sqrt[4]{2x^4-x^3+3x^2-x+1}$

2- Calcule o limite, caso existir.

a) $\lim_{x\to 4}7$ b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2}{3}$ c) $\lim_{x\to 2}(5x^3+x)$ d) $\lim_{x\to -4}\left(4x^2-\dfrac{1}{2}x\right)$

e) $\lim_{x\to 3}(3x^2+x-1)$ f) $\lim_{x\to 0}(x^4-x^3+x^2+1)$ g) $\lim_{x\to 1}6x^2$ h) $\lim_{x\to 3}(x-1)(4-x)$

i) $\lim_{x\to 3}\dfrac{4x^2}{x+1}$ j) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^3}{x^2-1}$ k) $\lim_{x\to -1}(2x-1)^6$ l) $\lim_{x\to 2}(3x^3-2x^2+5x-1)^2$

m) $\lim_{x\to 1}\sqrt[4]{81x^4}$ n) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{x^2}$ o) $\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)(x-4)$ p) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(4x-1)^{50}$

q) $\lim_{x\to 16}\dfrac{2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{x}+5}$ r) $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ s) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{x^2-5x-4}$ t) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{2+5x-3x^3}}{x^2-1}$

u) $\lim_{x\to 4}(3x-4)$ v) $\lim_{x\to -2}(-3x+1)$ w) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x-5}{4x+3}$ x) $\lim_{x\to 4}\dfrac{2x-1}{3x+1}$

y) $\lim_{x\to 1}(-2x+5)^4$ z) $\lim_{x\to -2}(3x-1)^5$

3- Calcule o limite, caso existir.

a) $\lim_{x\to\sqrt{2}}15$ b) $\lim_{x\to 15}\sqrt{2}$ c) $\lim_{x\to -2}x$ d) $\lim_{x\to 3}x$

e) $\lim_{x\to 3}(3x-9)^{100}$ f) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(4x-1)^{50}$ g) $\lim_{x\to -2}(3x^3-2x+7)$ h) $\lim_{x\to 4}(5x^2-9x-8)$

i) $\lim_{t\to -3}(3t+4)(7t-9)$ j) $\lim_{s\to 4}\dfrac{6s-1}{2s-9}$ k) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-6x+3}{16x^3+8x-7}$ l) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

m) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}$ n) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^4-16}$ o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)}{x-2}$ p) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)}$

q) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ r) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{16x^{\frac{2}{3}}}{4-x^{\frac{4}{3}}}$ s) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^4-4x+1}$ t) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

u) $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$ v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^5-1}$ w) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^6-1}$

x) $\lim\limits_{v\to 3}v^2(3v-4)(9-v^3)$ y) $\lim\limits_{k\to 2}\sqrt{3k^2+4\sqrt[3]{3k+2}}$ z) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x^2-25}+3\right)$

4- Calcule os seguintes limites, caso existam.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x-3}{4x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{3x-2}\right)^2$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+4x+3}}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-7x+5)$ f) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-2x^2-4x+3)$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+2}{x^2-6x+5}$ h) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-5x+4}{2x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{5-3x}$

j) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2-2x-5}{-x^2+3x+4}\right)^3$ k) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x^3-3x^2-2x-5}{2x^2-9x+2}\right)^2$ l) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{2x^2+3x-4}{5x-4}}$

m) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{3x^3-5x^2-x+2}{4x+3}}$ n) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+2}}{6-4x}$ o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

p) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ q) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{2+x}$ r) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}$

s) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$ t) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$ u) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{6x^2+11x+3}{2x^2-5x-12}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ w) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8+x^3}{4-x^2}$ x) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3}$

Gabarito

1)a) 75 b) 390 c) ½ d) ½ e) 256 f) 10 g) 0 h) $-\dfrac{3}{2}$ i) 225 j) $\sqrt[4]{8}$

2) a) 7 b) $\dfrac{2}{3}$ c) 42 d) 66 e) 29 f) 1 g) 6 h) 2 i) 9 j) $\dfrac{125}{24}$ k) 729 l)625

m) 3 n) $2\sqrt[3]{2}$ o) $5\sqrt{2}-20$ p) 1 q) $\dfrac{72}{7}$ r) 64 s) –2 t) $-\dfrac{1}{2}$

u) 8 v) 7 w) 7/5 x) 7/13 y) 81 z) –16807

3) a) 15 b) $\sqrt{2}$ c) –2 d) 3 e) 0 f) 1 g) –13 h) 36 i)150 j) –23
k) –½ l) Não existe m) 1/12 n) –3/8 o) –¼ p) 9 q) 2 r) 16/3 s) 5
t) 1/8 u) ½ v) 3/5 w) 0 x) 810 y) 8 z) 3

4) a) 4 b) 4/7 c) 4 d) –2 e) 2 f) 4 g) –8/3 h) –12 i) 0 j) 1/8 k) 9/4 l) $\sqrt{5}/3$
m) 2 n) –2 o) 2 p) 2 q) 4 r) 6 s) 4/5 t) –7/3 u) 7/11 v) 3/2 W) 3 x) –8/3

2.3- Limites Laterais

Se “x” se aproxima de “a” por meio de valores maiores que “a” ou pela sua direita, denota-se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b.$$

Esse limite é chamado de limite lateral à direita de “a”.

Se “x” se aproxima de “a” por meio de valores menores que “a” ou pela sua esquerda, denota-se:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = c.$$

Esse limite é chamado de limite lateral à esquerda de “a”.

O limite de f(x) para x→a existe se, e somente se, os limites laterais à direita e à esquerda são iguais, ou seja:

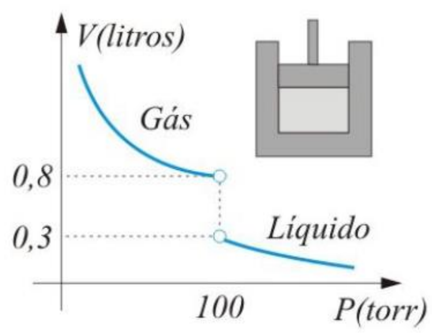
Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b$

Se $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x),\ então\ não\ existe\ \lim_{x \to a} f(x).$

Exemplos:

1- Um gás (tal como vapor d’água ou oxigênio) é mantido à temperatura constante no pistão da figura abaixo. À medida que o gás é comprimido, o volume V decresce até que atinja uma certa pressão crítica. Além dessa pressão, o gás assume forma líquida. Use o gráfico abaixo para calcular e interpretar.

a) $\lim_{P \to 100^-} V$; b) $\lim_{P \to 100^+} V$; c) $\lim_{P \to 100} V$.



a) Pela figura acima se observa que, quando a pressão P (em torrs) é baixa, a substância é um gás e o volume V (litros) é grande. Se P se aproxima de 100 por valores inferiores a 100, V decresce e se aproxima de 0,8, isto é $\lim_{P\to 100^-} V = 0{,}8$. O limite 0,8 representa o volume no qual a substância começa a se transformar de gás em líquido.

b) Se P > 100, a substãncia é um líquido. Se P se aproxima de 100 por valores superiores a 100, o volume V aumenta muito lentamente (pois os líquidos são quase incompressíveis) e $\lim_{P\to 100^+} V = 0{,}3$. O limite 0,3 representa o volume no qual a substãncia começa a se transformar em líquido em gás.

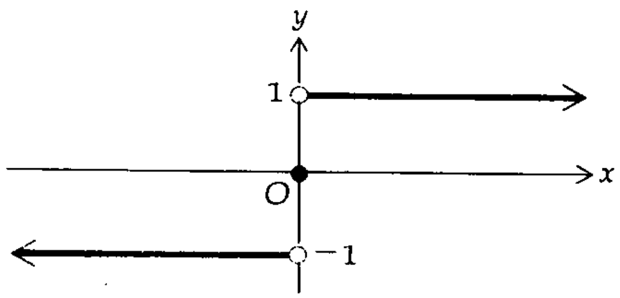
c) $\lim_{P\to 100} V$ não existe, pois os limites laterais à direita e à esquerda em (a) e (b) são diferentes. (Em P=100, as formas gasosa e líquida coexistem em equilíbrio, e a substância não pode ser classificada seja como gás ou como líquido).

2- A função sinal é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

***Signum* é a palavra em latim para sinal.**

a) Faça um esboço do gráfico dessa função .



b) Determine $\lim_{x\to 0^-} sgn\, x$ e $\lim_{x\to 0^+} sgn\, x$, se existirem.

Como sgn = –1 se x < 0 e sgn = 1 se x > 0, tem – se

$$\lim_{x \to 0^-} sgnx = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} sgnx = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

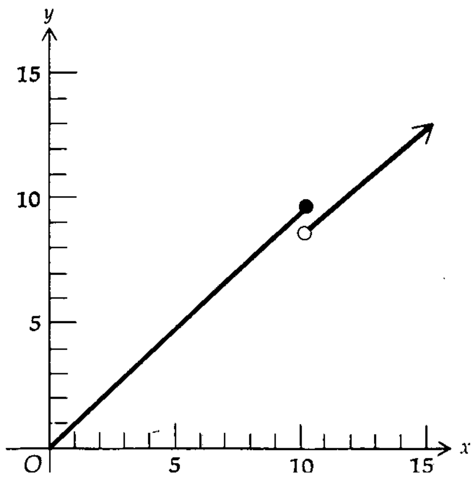
Obs.: $\lim_{x \to 0^-} sgnx \neq \lim_{x \to 0^+} sgnx$. Como os limites à esquerda e à direita não são iguais, o limite bilateral não existe.

$\lim_{x \to a} f(x)$ **existe e será igual a** L **se e somente se** $\lim_{x \to a^-} f(x)$ **e** $\lim_{x \to a^+} f(x)$ **existirem e forem iguais a** L**.**

3- Um atacadista vende um produto por quilo (ou fração de quilo); se forem pedidos não mais de 10 quilos, o atacadista cobrará \$ 1 por quilo. No entanto, para incentivar pedidos maiores, ele cobra \$0,90 por quilo, se mais do que 10 quilos forem comprados. Assim se x quilos do produto forem comprados e C(x) for o custo total do pedido, então

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}9x & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico de C está representado abaixo.



Observa-se que C(x) foi obtido da igualdade C(x) = x quando 0 ≤ x ≤ 10 e da igualdade C(x) = 0,9 x quando x > 10. Devido a essa situação, ao considerar o limite C(x) para x tendendo a 10, precisa – se distinguir entre o limite lateral esquerdo e o limite lateral direito em 10. Para a função C, tem – se

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} x = 10$$

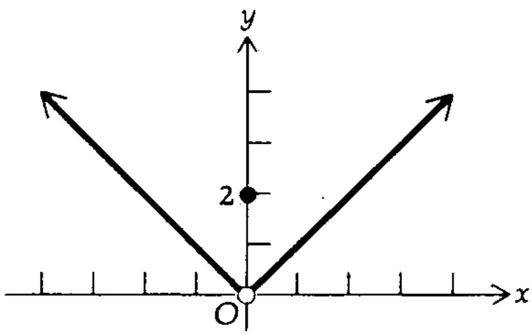
$$\lim_{x\to 10^+} C(x) = \lim_{x\to 10^+} 0{,}9x = 9$$

Como $\lim_{x\to 10^-} C(x) \neq \lim_{x\to 10^+} C(x)$, conclui – se $\lim_{x\to 10} C(x)$ não existe. Observa-se que em x = 10 há uma quebra no gráfico da função C.

4- Seja g definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de g.



b) Calcule $\lim_{x\to 0} g(x)$, se existir.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

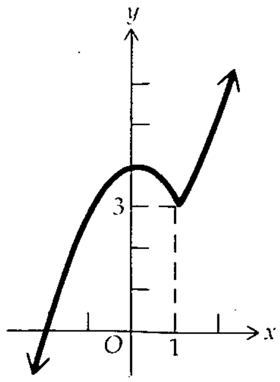
Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x),\ o\ \lim_{x\to 0} g(x)\ existe\ e\ \text{é}\ igual\ a\ zero.$

Observa – se nesse exemplo que g(0) = 2, o que não afeta $\lim_{x\to 0} g(x)$. Observa – se também que há uma quebra no gráfico de g em x = 0.

5- Seja h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 + x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de h.



b) Calcule cada um dos seguintes limites, se existirem: $\lim_{x\to 1^-} h(x)$, $\lim_{x\to 1^+} h(x)$ e $\lim_{x\to 1} h(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (4 - x^2) = 3$$

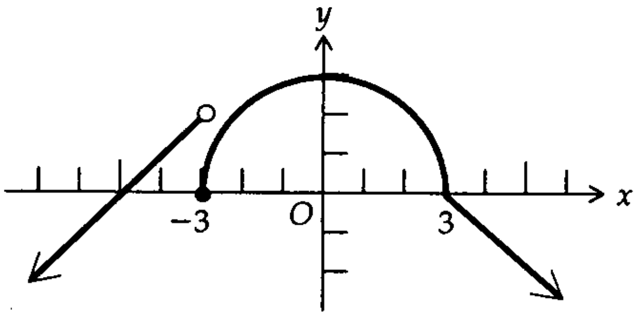
$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 + x^2) = 3$$

Como $\lim_{x\to 1^-} h(x)$ = $\lim_{x\to 1^+} h(x)$ e ambos são iguais a 3, $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$.

6- Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de f.



b) Calcule, se existirem, cada um dos seguintes limites: $\lim_{x\to -3^-} f(x)$, $\lim_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim_{x\to -3} f(x)$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$.

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (x+5) = 2 \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = 0$$

Como $\lim_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim_{x\to -3^+} f(x)$, então $\lim_{x\to -3} f(x)$ não existe.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (3-x) = 0$$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$, então $\lim_{x\to 3} f(x)$ não existe.

2.4- Limites Infinitos

Serão discutidas funções cujos valores aumentam ou diminuem sem limitação, quando a variável independente aproxima-se cada vez mais de um número fixo.

Exemplo: Considerar a função definida por $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais exceto 2 e a imagem é o conjunto de todos os números positivos.

Tabela 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
3	3
2,5	12
2,25	48
2,1	300
2,01	30.000
2,001	3.000.000

Foram pesquisados os valores funcionais de f quando x está próximo de 2. Os dados da Tabela 1 mostram x se aproximando de 2 pela direita. Observa – se que à medida que x se aproxima de 2 por valores maiores que 2, f(x) cresce indefinidamente.

Para indicar que f(x) cresce indefinidamente quando x tende a 2 por valores maiores do que 2, escreve – se

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

.

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$
1	3
1,5	12
1,75	48
1,9	300
1,99	30.000
1,999	3.000.000

Conforme dados da Tabela 2, x foi se aproximando de 2 pela esquerda e observa – se que à medida que x aproxima – se de 2 por valores menores que 2, f(x) cresce sem limites e pode – se escrever que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

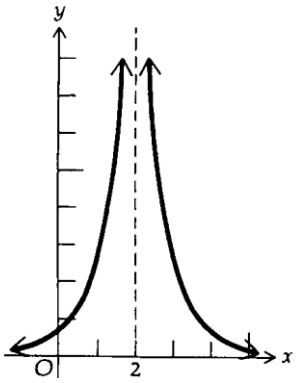
.

Assim sendo, quando x tende a 2 pela direita ou pela esquerda, f(x) cresce sem limites e pode – se escrever que

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

.

Dos dados apresentados nas Tabelas 1 e 2 pode – se esboçar o gráfico a seguir.



Observa –se que ambos os "ramos" da curva aproximam –se da reta pontilhada x = 2, quando x cresce indefinidamente. Essa reta pontilhada é denominada de assíntota vertical.

Definição formal de valores funcionais que crescem indefinidamente

Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. **Quando x tende a a, $f(x)$ cresce indefinidamente** e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se para qualquer número $N > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > N$$

Outra forma de escrever a definição anterior é a seguinte: " Os valores funcionais de f(x) crescem indefinidamente quando x tende a um número a, se f(x) puder se tornar tão grande quanto se deseja (isto é, maior do que qualquer número positivo N) para todos os valores de x suficientemente próximos de a, mas não iguais a a".

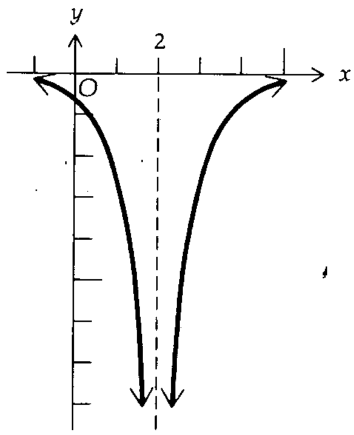
Deve –se enfatizar que $+\infty$ não é o símbolo de um número real; logo, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, não tem o mesmo significado que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, em que L é um número real.

A igualdade $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ pode ser lida como " o limite de f(x) quando x tende a a é infinito positivo". Nesse caso, o limite não existe, mas o símbolo $+\infty$ indica que o comportamente dos valores funcionais f(x) quando x aproxima –se cada vez mais de a.

De maneira análoga, pode –se indicar o comportamento de uma função cujos vaores funcionais decrescem indefinidamente.

Exemplo: Considerar a função definida por $g(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$.

Esboço do gráfico:



Os valores funcionais dados $g(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$ por são os negativos dos valores dados por $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

Assim, para a função g, quando x tende a 2, pela direita ou pela esquerda, g(x) decresce indefinidamente e pode ser representado por

$$\lim_{x \to 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

Seja f uma função definida em todo número de algum intervalo I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. **Quando x tende a a, $f(x)$ decresce indefinidamente** e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se para todo número $N < 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < N$

A igualdade $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ pode ser lida como "o limite de f(x) quando x tende a a é infinito negativo", lembrando que o limite não existe e que o símbolo $-\infty$ indica somente o comportamento dos valores funcionais quando x tende a a.

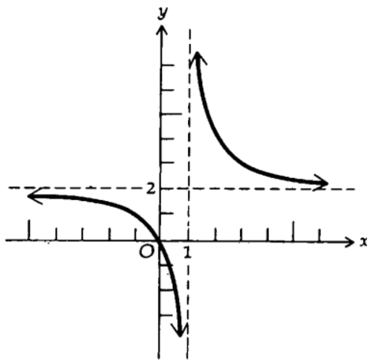
Pode – se considerar limites laterais infinitos, especificando $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, se f estiver definida em todo número de algum intervalo aberto (a,c) e se para todo N 0 existir $\delta > 0$ tal que se

$$0 < x - a < \delta, então\ f(x) > N.$$

Definições análogas podem ser dadas para $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Exemplo: Considerar a função definida por $h(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

Esboço do gráfico:



Observar que:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$$

Para a função h, à medida que x se aproxima de 1 por valores menores do que 1, a função decresce indefinidamente e, à medida que x se aproxima de 1 por valores, maiores do que 1, os valores funcionais crescem indefinidamente.

2.4.1- Teoremas do Limite

I-

> Se r for um inteiro positivo qualquer, então
>
> (i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$
>
> (ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{se } r \text{ for ímpar} \\ +\infty & \text{se } r \text{ for par} \end{cases}$

Prova: (i) Precisa –se mostrar que para todo N > 0 existe $\delta >$ 0 tal que

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad \frac{1}{x^r} > N$$

ou, equivalentemente, como $x > 0$ e $N > 0$,

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad x^r < \frac{1}{N}$$

ou, equivalentemente, como $r > 0$,

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$$

A afirmativa acima é válida se $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$. Assim sendo, quando $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad \frac{1}{x^r} > N$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Obs.: A prova de (ii) é análoga.

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

II- O Teorema de Limite, a seguir, trata do limite de uma função racional para a qual o limite do denominador é 0 e o limite do numerador é uma constante não-nula.

Se a for um número real qualquer e se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(iv) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

O teorema também será válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Prova: (i)

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

Para provar que é necessário mostrar que para todo N >0 existe um $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad \frac{g(x)}{f(x)} > N$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = c > 0$, tomando $\varepsilon = \frac{1c}{2}$, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que se

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |g(x) - c| < \tfrac{1}{2}c$$

Aplicando

$$\boxed{|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a \quad \text{onde a} > 0}$$

Segue que existe um $\delta_1 > 0$ tal que se

$$\text{se } \ 0 < |x - a| < \delta_1 \ \text{ então } \ -\tfrac{1}{2}c < g(x) - c < \tfrac{1}{2}c$$

$$\Leftrightarrow \ \text{se } \ 0 < |x - a| < \delta_1 \ \text{ então } \ \tfrac{1}{2}c < g(x) < \tfrac{3}{2}c$$

Assim, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } \ 0 < |x - a| < \delta_1 \ \text{ então } \ g(x) > \tfrac{1}{2}c$$

Agora, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } \ 0 < |x - a| < \delta_2 \ \text{ então } \ |f(x)| < \epsilon$$

Como $f(x)$ está se aproximando de zero por valores positivos de $f(x)$, as barras de valor absoluto em $f(x)$ podem ser removidas; assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } \ 0 < |x - a| < \delta_2 \ \text{ então } \ 0 < f(x) < \epsilon$$

Pode – se concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } \ 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \ \text{ então } \ \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\tfrac{1}{2}c}{\epsilon}$$

Logo, se $\epsilon = c/(2N)$ e $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ então

$$\text{se } \ 0 < |x - a| < \delta \ \text{ então } \ \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\tfrac{1}{2}c}{c/(2N)} = N$$

Aplicando o Teorema II, pode – se obter uma indicação de que o resultado será $+\infty$ ou $-\infty$, tomando um valor adequado de x próximo de a para assegurar de que o quaociente é positivo ou negativo .

Exemplos:

1-Calcule.

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

Solução:

O limite do numerador é 14, o que pode ser facilmente verificado.

$$\lim_{x \to 3^+} (x - 3)(x + 1) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) \cdot \lim_{x \to 3^+} (x + 1)$$

$$= 0 \cdot 4$$

$$= 0$$

O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores positivos.

Então,

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

Solução:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x - 3)(x + 1)}$$

Como na parte (a), o limite do numerador é 14.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3^-} (x - 3)(x + 1) &= \lim_{x \to 3^-} (x - 3) \cdot \lim_{x \to 3^-} (x + 1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Nesse caso, o limite do denominador é 0, mas ele está tendendo a 0 por valores negativos.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

Logo:

2- Ache.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

Solução:

(a) Como $x \to 2^+$, $x - 2 > 0$; então $x - 2 = \sqrt{(x-2)^2}$. Logo,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$$

O limite do numerador é 2. O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores positivos. Logo, do Teorema de Limite , segue que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = +\infty$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

Solução:

(b) Como $x \to 2^-$, $x - 2 < 0$; então $x - 2 = -\sqrt{(2-x)^2}$. Logo,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}$$

O limite do numerador é 2. O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores negativos. Logo, pelo Teorema de Limite ,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

3-Calcule.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Solução:

Obs.: Para calcular limites no infinito, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. Nesse caso, a maior potência de x é x², então temos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3-0-0}{5+0+0}$$

$$= \frac{3}{5}$$

2.4.2- **Formas Indeterminadas**

Existem símbolos que não têm significado e são denominados como símbolos de indeterminação que são $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$.

Obs.: Se o limite de uma função apresentar uma dessas indeterminações não significa que o limite não existe, deve – se levantar a indeterminação e encontrar o limite da função.

2.5- Limites Envolvendo Funções Compostas

Inicialmente, precisa – se entender que função é uma relação entre dois conjuntos. Uma função composta é uma relação de outra relação, ou seja, é uma relação que depende de outra para existir. Matematicamente:

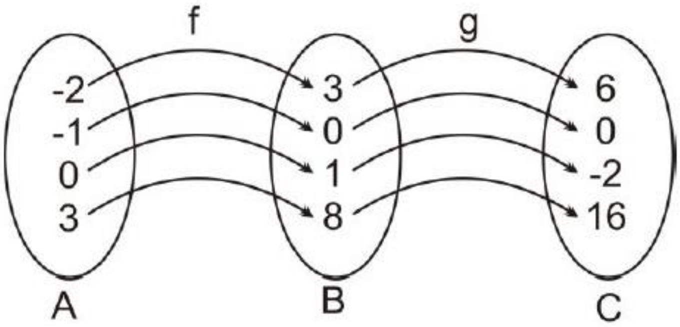
Considerando três conjuntos distintos A,B e C. Entre eles existem as seguintes funções: $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. Existe outra função $h\colon A \to C$, assim a função $h(x) = g(f(x))$ é chamada função composta. Essa função composta também pode ser indicada por $gof = g(f(x))$. (lê – se: g composta com f).

Exemplo de função composta:

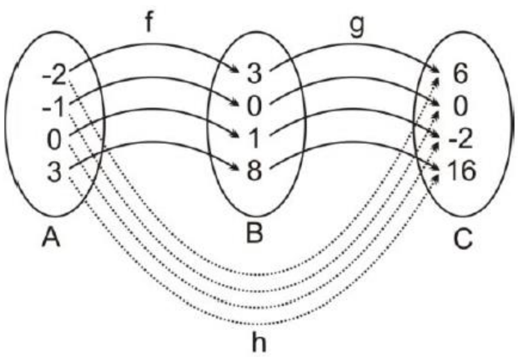
Dados três conjuntos A= { – 2, – 1, 0, 3}, B= {3,0, –1,8} e C= {6,0,–2, 16}. Entre eles existem as seguintes funções.

$f\colon A \to B$ definida por $f(x)\colon x^2 - 1$ e $g\colon B \to C$ definida por $g(x) = 2x$.

Diagrama



Para cada elemento de A existe um elemento em B tal que $f(x)\colon x^2 - 1$ tal que para cada elemento de B existe um elemento C $g(x) = 2x$. Assim, pode –se concluir que existe uma função $h\colon A \to C$ definida por $h(x) = (f(x))$, ou seja, $h(x) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$.



Exemplos: a) Sendo dados $f(x)=x^2+2$ e $g(x)=3x$, calcular $g(f(x))$ e $f(g(x))$.

$$g(f(x))=g(x^2+2)=3(x^2+2)=3x^2+6 \Rightarrow g(f(x))=3x^2+6$$
$$f(g(x))=f(3x)=(3x)^2+2=9x^2+2 \Rightarrow f(g(x))=9x^2+2$$

b) Dados $f(x)=2x-1$ e $g(x)=3x+2$, calcular $f(g(1))$.

$$f(g(x))=f(3x+2)=2(3x+2)-1=6x+4-1=6x+3$$
$$f(g(1))=6(1)+3=6+3=9$$

Retomando os limites envolvendo funções compostas.

Se $\lim_{x\to c} g(x)=b$ e f é contínua em b então:

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big)=f(b)=f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{\frac{x+3}{(x+3)(x^2-3x+9)}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x^2-3x+9)}}=\sqrt[3]{\frac{1}{(-3)^2-3(-3)+9)}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$$

2.6- Limite Envolvendo os Símbolos $+\infty$ **e** $-\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

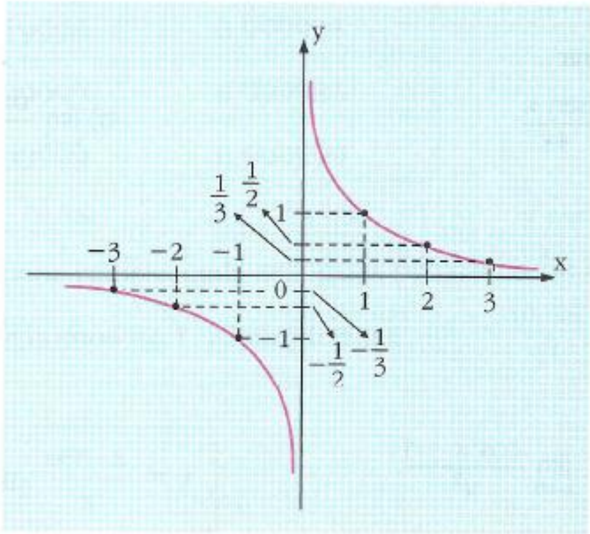
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

O símbolo ∞ (infinito) não está associado à ideia de número, portanto não pode ser considerado um número.

Analisemos as seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, sendo f: R* →R.

x	f(x)
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$



Observe que, quando x tende a zero pela direita, f(x) assume valores cada vez maiores e, quando x tende a zero pela esquerda, f(x) assume valores cada vez menores. Assim, podemos escrever que

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

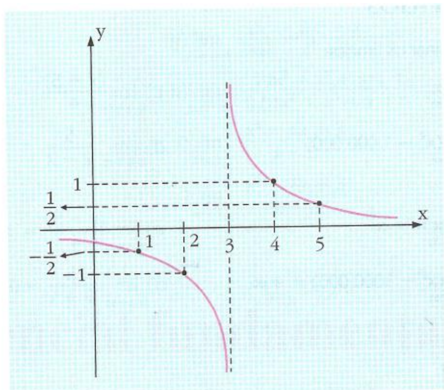
Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Por outro lado, quando x assume valores cada vez maiores, f(x) se aproxima cada vez mais de zero. Assim: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

E quando x assume valores cada vez menores, f(x) se aproxima de zero. Assim $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, sendo x ≠ 3

x	f(x)
1	$-\frac{1}{2}$
2	-1
4	1
5	$\frac{1}{2}$



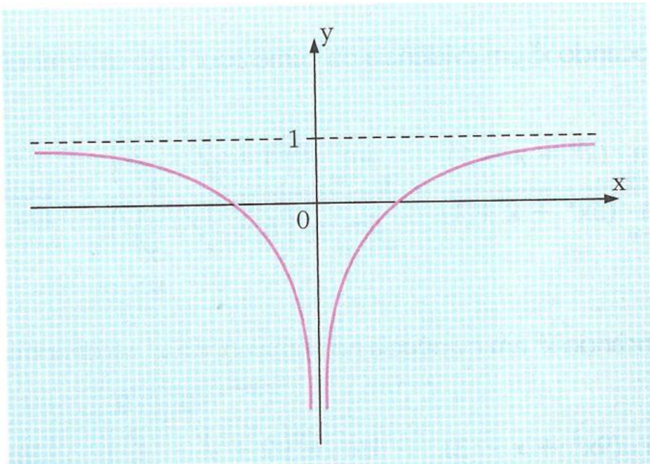
Do gráfico temos,

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$. Assim, não existe $\lim_{x\to 3} f(x)$.

Fazendo x tender a $-\infty$ e x tender a $+\infty$, temos $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = -\left|\frac{1}{x}\right| + 1$, sendo x ≠ 0.

x	f(x)
1	0
2	$\frac{1}{2}$
-1	0
-2	$\frac{1}{2}$



Observando o gráfico, temos:

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

Exemplos:

a) Dada a função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = \lim_{x\to +\infty} x^3\left(2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^3(2 - 0 + 0 + 0) = \lim_{x\to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

b) Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 3x - 7}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{4x^2+3x-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-0+0}{4+0-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

c) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

Exercícios

1) Calcule os limites, caso existam.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+7)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x+1)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^6+2x^3-x+4)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^7+2x^2+\sqrt{3}x)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+1}{4x-5}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x^2-5x+6}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^3-x^2+x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-1}{2x+3}\right)^2$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5x+7}-x$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2+4x-7}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-7x}{2+3x}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+2x}{2x^2-3}$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x^2}{x+3}$

o) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8+x^2}{x(x+1)}}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x}{5x+1}$

q) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-3}{3x+2}$

r) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x+1}$

s) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

t) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{3x^3+5x^2-6x+2}$

u) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{8x^3-1}$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^3-x^3}$

w) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^3}{x(x+1)(x+2)}$

x) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x+2)^3}{2x(3x+1)(4x-1)}$

y) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^3(3x-2)^2}{x^5}$

z) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+2)^4-(x-1)^4}{(2x+3)^3}$

2) Calcule os limites, caso existam.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+4}-x\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-2}\right)$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$ e) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ f) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-3x+4}\right)$

g) $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$ h) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-x\right)$ i) $\lim_{x\to-\infty}3x^5$

j) $\lim_{x\to\infty}e^x$ k) $\lim_{x\to-\infty}e^x$ l) $\lim_{x\to\infty}(2x^4-3x^3+x+6)$

m) $\lim_{x\to-\infty}(2x^4-3x^3+x+6)$ n) $\lim_{x\to\infty}(2x^4-3x^3+x+6)$ o) $\lim_{x\to\infty}(2x^5-3x^2+6)$

p) $\lim_{x\to-\infty}(2x^5-3x^2+6)$ q) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+1}{5x^2+2x-1}$ r) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-3x^2+1}{5x^2+2x-1}$

s) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3+2x^2+5}{x+1}$ t) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-3}$ u) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-3}$

v) $\lim_{x\to\infty}\frac{25x-2}{16x-3}$ w) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2-5x}$ x) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+3}$

y) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{x^3-x^2+x-1}$ z) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{2x^2+5x-1}$

Gabarito

1) a) +∞	b) +∞	c) +∞	d) –∞	e) 2	f) 0	g) +∞
h) 1	i) 9	j) – 5/2	k) 5/2	l) –7/3	m) –∞	n) +∞
o)1	p) –2/5	q) 4/3	r) +∞	s) –∞	t) 0	u) 0
v) 1/3	w) 8	x) 9/8	y) 72	z) 3/2		
2) a) 3/2	b) 3/2	c) 0	d) – ½	e) 0	f) – ½	g) 0
h) a/2	i) –∞	j) +∞	k) 0	l) +∞	m) +∞	n) +∞
o) +∞	p) –∞	q) +∞	r) –∞	s) –∞	t) 2	u) 2
v) 25/16	w) ½	x) 0	y) 0	z) 0		

Revisando: Limites Envolvendo Infinitos

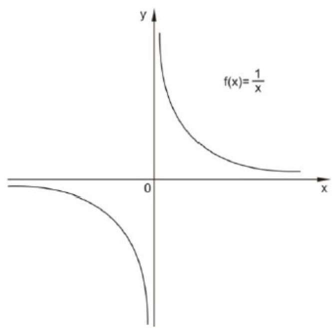
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0_+}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to0_-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Exemplo:



Unidade 3- Teorema do Confronto e Limites Fundamentais

3.1- Teorema do Confronto

Introdução

O Teorema do Confronto, também conhecido como Teorema do Sanduíche, é utilizado no cálculo de limite e na demonstração de outros teoremas.

Teorema 1: Teorema do Confronto

Suponhamos que f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) e que exista r > 0, tal que ,

0 < I x – a I < r. Nessas condições, se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Esse teorema é válido também se no lugar de $x \to a$ colocarmos

$$x \to +\infty \; ou \; x \to -\infty \, .$$

O Teorema do Confronto - Demonstração

Teorema: Sejam f, g e h três funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \neq a$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então existe $\lim_{x\to a} g(x)$ e também é igual a L.

Demonstração:

Por **hipótese**, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ (1)

e

se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|h(x) - L| < \varepsilon$ (2)

Então, de (1), temos que $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$ ou seja, $-\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L$ para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta_1$.

E de (2), temos que $-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$ ou seja, $-\varepsilon + L < h(x) < \varepsilon + L$ para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Então se $0 < |x - a| < \delta$, temos

$-\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L$ e $-\varepsilon + L < h(x) < \varepsilon + L$

ou seja, como $f(x) \le g(x) \le h(x)$, podemos escrever:

$-\varepsilon + L < f(x) \le g(x) \le h(x) < \varepsilon + L$

Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, temos $-\varepsilon + L < g(x) < \varepsilon + L$, ou seja, $|g(x) - L| < \varepsilon$, o que significa que $\lim_{x \to a} g(x) = L$, como queríamos demonstrar.

Exemplo:

Calcular $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Usando o Teorema do Confronto, podemos escrever o seguinte

$x \to +\infty$

Desenvolvimento	Comentários
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$	O problema dado é uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}})$ $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$	Outra forma de representar a função $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
$0 < \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} > 0$ $\sqrt{x+1} > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$	Uma vez que $\lim_{x \to +\infty} 0 = 0$ e que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$, o Teorema do Confronto póde ser aplicado.

teorema:

Teorema 2: Sejam f e g duas funções com mesmo domínio A e tais que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e Ig(x)I ≤ M para todo x em A, sendo M um número real fixo. Nessas condições, $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Esse teorema continua válido se no lugar de de $x \to a$ colocarmos

$$x \to +\infty \; ou \; x \to -\infty \, .$$

Exemplos:

i)Calcular $\lim_{x \to 0} x^2 \, g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} 1, se \;\; x \; \in Q \\ -1, se \; x \; \notin \; Q \end{cases}$

Solução:

Como $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ e Ig(x)I ≤ 1, usando o teorema 2 concluímos que $\lim_{x \to 0} x^2 \, g(x) = 0$.

ii)Calcular $\lim_{x \to 0} x . sen \frac{1}{x}$

Solução:

Como $\lim_{x \to 0} x = 0$ e $\left| sen \; \frac{1}{x} \right| \leq 1$, usando Teorema 2 concluímos que $\lim_{x \to 0} x . sen \frac{1}{x} = 0$.

iii) Calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{sen \; x}{x}$

Solução:

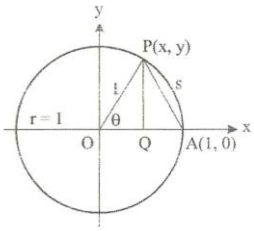
Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $|sen \; x| \leq 1$, usando Teorema 2 concluímos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} senx = 0$.

d) Aplicando o Teorema do Confronto, calcular

a)$\lim_{\theta \to 0} sen\theta$ e b) $\lim_{\theta \to 0} cos\theta$, sendo θ medido em radianos.

Solução:

Consideremos o desenho a seguir.



θ é medido em radianos. Temos que $\theta = \frac{s}{r}$ e como $r = 1$, obtemos $\theta = s$.

O triângulo APQ é retângulo e os catetos medem: $\overline{AQ} = 1 - \cos\theta$ e $\overline{QP} = \text{sen}\theta$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a esse triângulo, obtemos: $\text{sen}^2\theta + (1-\cos\theta)^2 = \left(\overline{AP}\right)^2 < \theta^2$.

Como cada elemento no primeiro membro dessa desigualdade é positivo, podemos escrever:

a) $\text{sen}^2\theta < \theta^2$ ou $-\theta < \text{sen}\theta < \theta$.
Como $\lim\limits_{\theta\to 0}(-\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0}\theta = 0$, pelo T. do Confronto concluímos que $\lim\limits_{\theta\to 0} \text{sen}\theta = 0$.

b) $(1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ ou $-\theta < 1-\cos\theta < \theta$.
Como $\lim\limits_{\theta\to 0}(-\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0}\theta = 0$, pelo T. do Confronto concluímos que $\lim\limits_{\theta\to 0}(1-\cos\theta) = 0$ e, portanto $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$.

iv) Ache o limite, se existir.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,5x}$$

$$\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,5x} = \frac{3\left(\dfrac{\text{sen}\,3x}{3x}\right)}{5\left(\dfrac{\text{sen}\,5x}{5x}\right)}$$

Quando x tende a zero, o mesmo acontece com $3x$ e $5x$. Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{3x} = \lim_{3x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{3x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,5x}{5x} = \lim_{5x\to 0}\frac{\text{sen}\,5x}{5x} = 1$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,5x} = \frac{3\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{sen}\,3x}{3x}\right)}{5\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{sen}\,5x}{5x}\right)} = \frac{3\cdot 1}{5\cdot 1} = \frac{3}{5}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 \cdot \cos^2 x}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 2$$

3.2- Limite Trigonométrico Fundamental

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senkx}{mx}=\frac{k}{m}$$

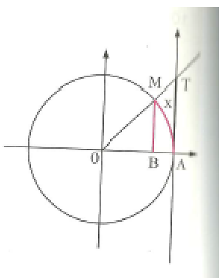
Seja a função f: R* →R, definida por $f(x)=\frac{sen\,x}{x}$.

Considerando $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$, vamos tomar alguns valores para x e calcular

$$f(x)=\frac{sen\,x}{x}.$$

x	sen x	$f(x)=\frac{sen\,x}{x}$
– 0,04	– 0,039989	0,999733
– 0,03	– 0,029995	0,999850
– 0,02	– 0,019998	0,999993
– 0,01	– 0,009999	0,999933
– 0,001	– 0,000999	0,999999
0,04	0,039989	0,999733
0,03	0,029995	0,999850
0,02	0,019998	0,999933
0,01	0,009999	0,999983
0,001	0,000999	0,999999

Observando a tabela, notamos que, para valores cada vez mais próximos de 0, obtemos valores de $f(x)=\frac{sen\,x}{x}$ cada vez mais próximos de 1. Assim, temos $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$.



Demonstrando com figuras: $\widehat{AM}=\mathrm{x}$; $\mathrm{sen\,x}=\overline{\mathrm{BM}}$ e $\mathrm{tg\,x}=\overline{\mathrm{AT}}$

Sendo $0<\mathrm{x}<\frac{\pi}{2}$, temos $\mathrm{sen\,x}<\mathrm{x}<\mathrm{tg\,x}$.

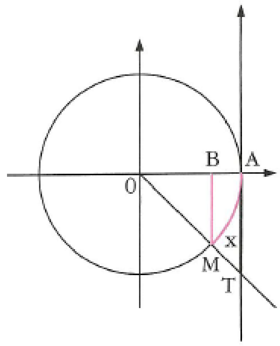
Dividindo por sen x (sen x > 0):

$$\frac{\mathrm{sen\,x}}{\mathrm{sen\,x}}<\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{sen\,x}}<\frac{\mathrm{tg\,x}}{\mathrm{sen\,x}}\Rightarrow 1<\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{sen\,x}}<\frac{1}{\cos\mathrm{x}}$$

Se $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, temos $\text{sen } x > x > \text{tg } x$

Dividindo por sen x(sen x < 0):

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$



Então, para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, conclui-se que

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Invertendo, $1 > \dfrac{\text{sen } x}{x} > \cos x$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, temos: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1}$

Exemplos:

a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen 8x}{3x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen8x}{3x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} . \frac{sen8x}{8x} .8 \right) = \frac{1}{3}.1.8 = \frac{8}{3}$$

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen5x}{sen4x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen5x}{sen4x} = \lim_{x \to 0} \frac{5\dfrac{sen5x}{5x}}{4\dfrac{sen4x}{4x}} = \frac{5.1}{4.1} = \frac{5}{4}$$

c) Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x}.$$

Temos que $\dfrac{\sin 7x}{4x} = \dfrac{7}{4}\left(\dfrac{\sin 7x}{7x}\right)$

Logo $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$

$$= \frac{7}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$

Obs.: sin = sen

Exercícios

Calcule:

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{6x}$ b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}x}$ c) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}x}$ d) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}$

e) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{2x}$ f) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{x}$ g) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen2x}{sen3x}$ h) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{senx}{5x}$

i) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{senx}$ j) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen\pi x}{sen3\pi x}$ k) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen4x}{3x}$ l) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{5x}$

m) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{x}$ n) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2x}{senx}$ o) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{3x}{sen5x}$ p) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{2x}$

q) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{senx^2}{x}$ r) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x^2}$ s) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen^2 3x}{5x^2}$ t) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x^2}{x^2}$

u) $\displaystyle \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}$ v) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{5x}$ w) $\displaystyle \lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ x) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{4x}$

y) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{4x}$ z) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen5x}{sen3x}$

Gabarito

a) e^6 b) $\sqrt{e}$ c) $e\sqrt[3]{e}$ d) e e) 3/2 f) 3 g) 2/3 h) 1/5 i) 1 j) 1/3

k) 4/3 l) 0 m) 3 n) 2 o) 3/5 p) 3/2 q) 0 r) não existe

s) 9/5 t) 0 u) e^{14} v) e^{-10} w) e^2 x) ¼ y) 0 z) 5/3

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{3x}$ 1

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 8x}{4x}$ 2

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{x}$ 5

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{3x}$ $\frac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{12x}$ $\frac{1}{12}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{3x}$ $\frac{2}{3}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{3x}$ $\frac{4}{3}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$ 1

i) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\text{sen } (x + \pi)}{x + \pi}$ 1

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ 0

l) $\lim\limits_{x \to 0} 5x \text{ cossec } x$ 5

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ $\frac{1}{2}$

3.3- Limite Exponencial Fundamental

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$e = 2{,}71828182...$$

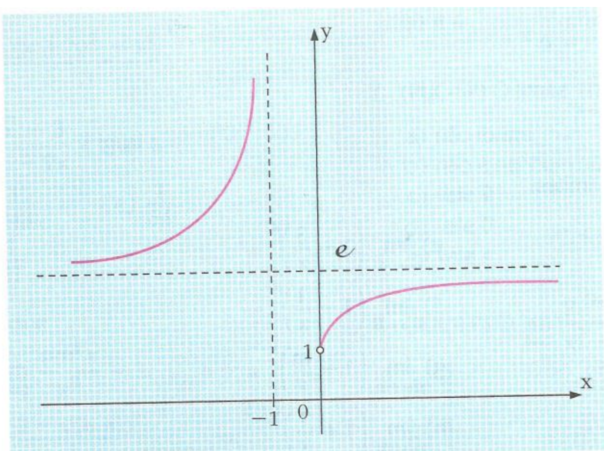
$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

O limite da função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, de base positiva, quando x tende a $-\infty$, ou x tende a $+\infty$, é o número irracional $e = 2{,}71828...$ (número de Euler) que é base dos logaritmos naturais. Ou seja:

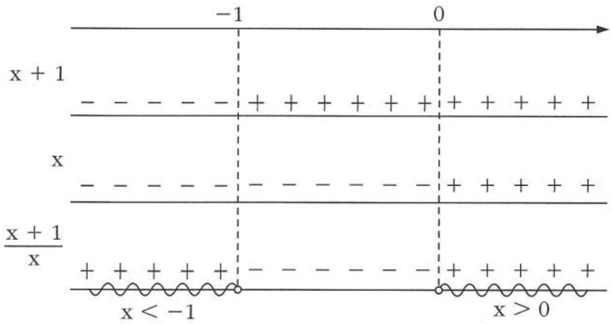
$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \textbf{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Gráfico Cartesiano de f



Sendo $1 + \frac{1}{x} > 0$, temos $\frac{x+1}{x} > 0$.

Portanto, $x > 0$ ou $x < -1$.



Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{4} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{4} = e^{4}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{4x}$

Neste caso usaremos uma mudança de variável.

Façamos $x=-3t$. Se $x\to-\infty$ então $t\to+\infty$.

Logo $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{4x} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3t}\right)^{4(-3t)} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-12t} = \left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-12} = e^{-12}$.

c) Determinar

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{2} = e^{2}$$

d)

Determinar o $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

Solução:

Fazendo $\frac{3}{x} = \frac{1}{u}$, temos $x = 3u$ e $x \to +\infty$ implica $u \to +\infty$ assim:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3 = e^3$$

logo: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$

Exercícios:

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ e^3

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$ e^2

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{4x}$ e^4

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x}$ $\sqrt{e}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x}$ e^3

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x}$ $\frac{1}{e}$

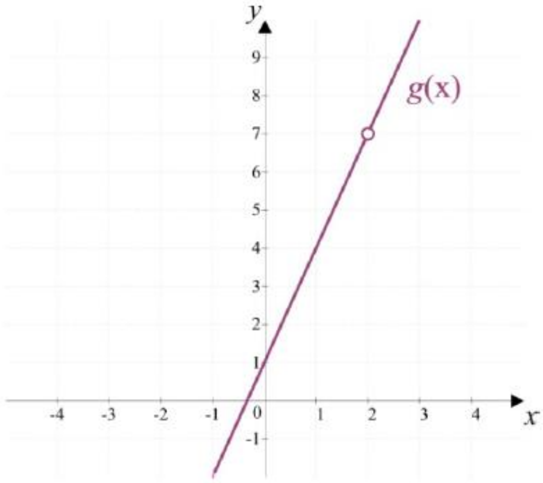
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{m}{x}\right)^{x}$ $e^{-m} = \frac{1}{e^m}$

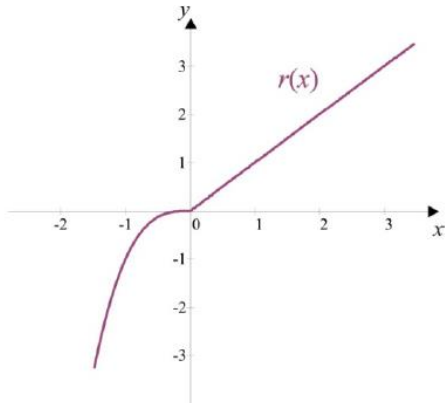
h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5}$ e

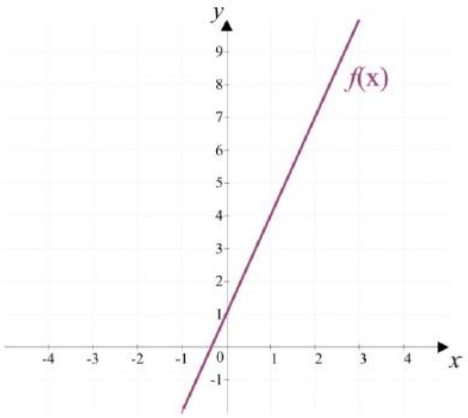
Unidade 4- Funções Contínuas

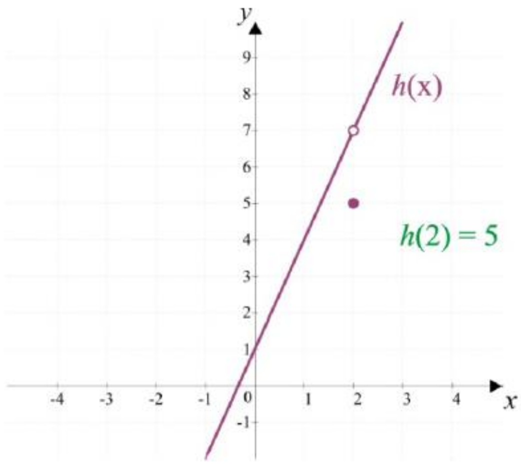
Uma função contínua é uma função que não apresenta interrupção – ou seja, uma função que tem um gráfico que pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel. Assim, verificar que uma função não é contínua, a partir do seu gráfico, é muito simples.

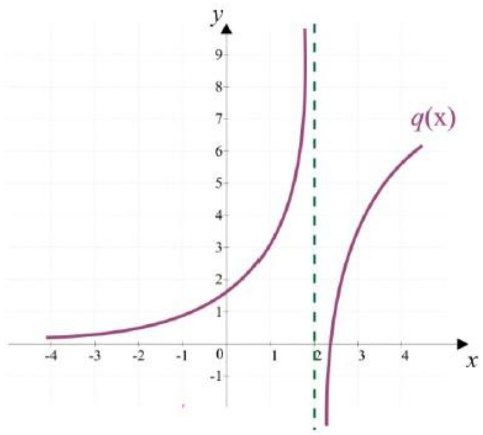
Observe os gráficos a seguir:

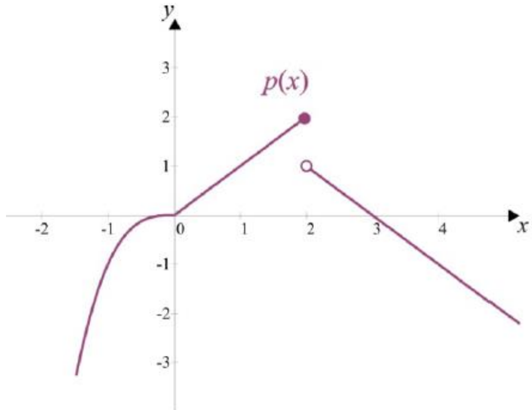












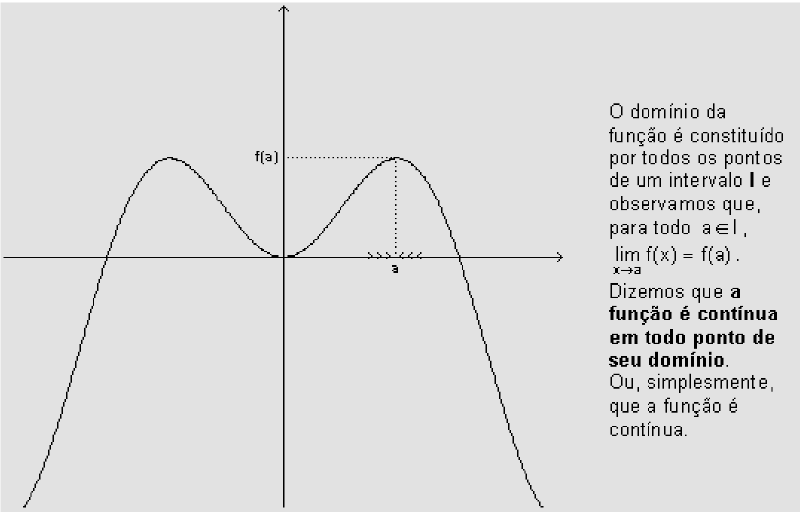
Observações:

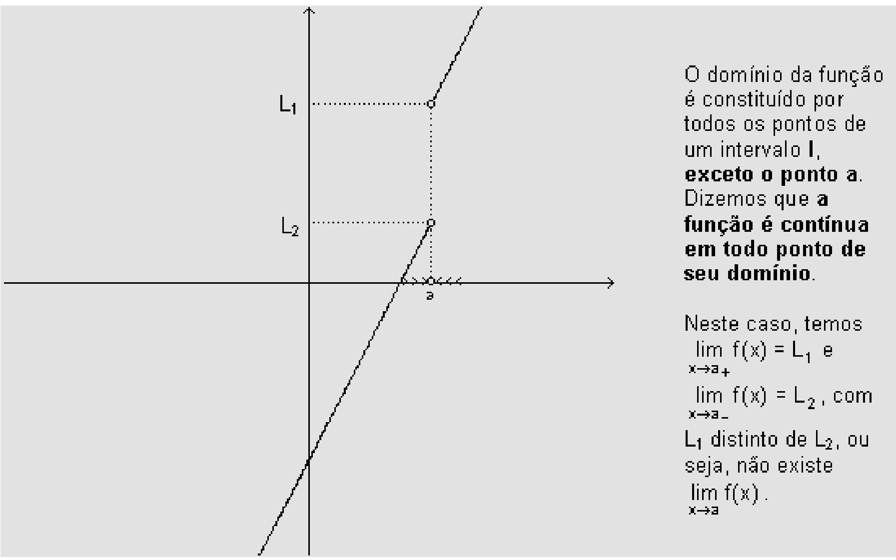
- ✓ As funções, f(x) e r(x), não apresentam interrupções, logo são contínuas para todo valor de x. Elas são contínuas em todo o seu domínio, ou seja, para todo x no conjunto dos números reais.
- ✓ As funções, g(x), h(x), p(x) e q(x), apresentam interrupções em x = 2, logo elas não são contínuas em x = 2. Elas são contínuas em qualquer intervalo que não contém x = 2.

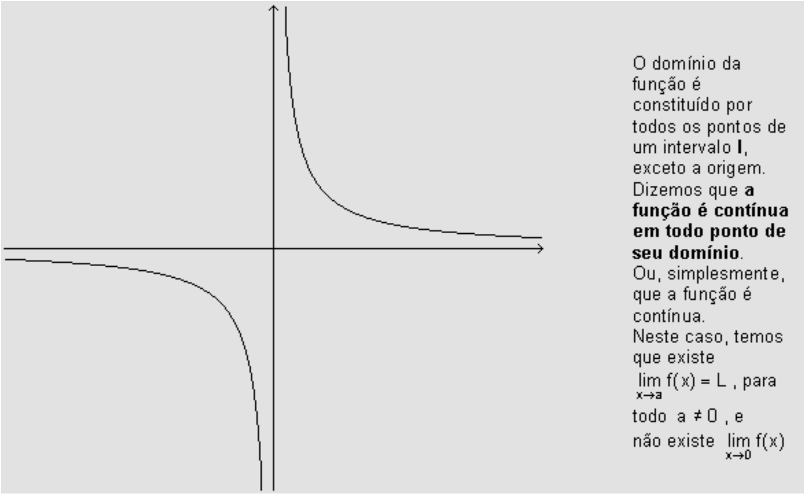
4.1-Conceito de Continuidade

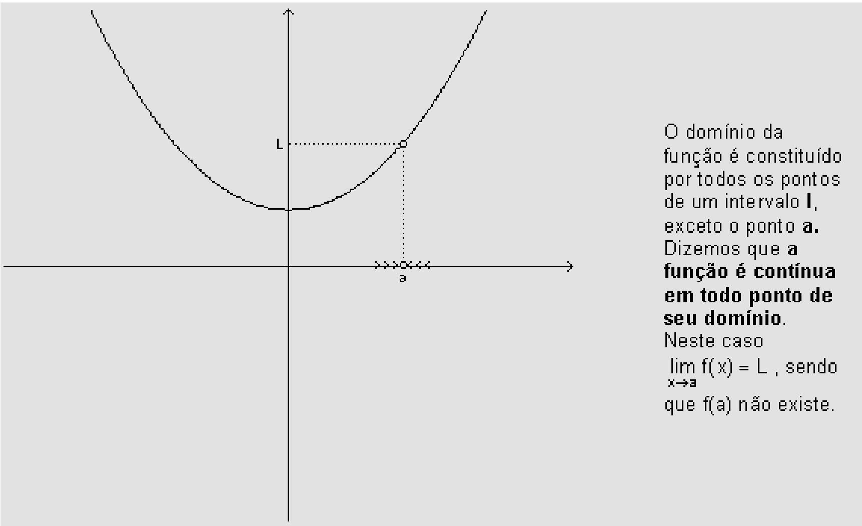
Um conceito fundamental no Cálculo, no que diz respeito ao estudo de funções, é o de continuidade de uma função num ponto de seu domínio.

Exemplos:









4.2-Continuidade de uma Função em um Ponto

O conceito de continuidade de uma função em um ponto de seu domínio pode ser colocado na forma de uma definição precisa:

Definição: f é contínua num ponto a de seu domínio quando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Quando f é contínua em cada ponto de seu domínio, dizemos que f é contínua.

Observamos que para questionarmos se uma dada função é contínua em determinado ponto, precisamos tomar o cuidado de verificar se esse ponto pertence ao domínio da função. Se tal ponto não está no domínio, a função não é contínua nesse ponto.

Assim, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio $R^* = R - \{0\}$, porém não é contínua no conjunto R, pois não é contínua em x=0, uma vez que não está definida nesse ponto.

Uma propriedade importante relaciona a continuidade de uma função num ponto de seu domínio com a derivabilidade dessa função, ou seja, com a existência de reta tangente ao gráfico nesse mesmo ponto.

Teorema: Se f é derivável num ponto x_0 de seu domínio, então f é contínua em x_0.

Obs.: Dessa forma, a existência de reta tangente ao gráfico de uma função num ponto de seu domínio acarreta necessariamente na continuidade da função nesse ponto.

Por **hipótese**, temos que f é derivável num ponto x_0 de seu domínio, ou seja, existe

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A **tese** a ser demonstrada é que f é contínua em x_0, ou seja, existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Demonstração:

Observemos inicialmente que mostrar a existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, é equivalente a mostrar a existência do $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)]$ e que $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Vejamos então:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0).0 = 0$$

Multiplicamos e dividimos por $x\text{-}x_0$

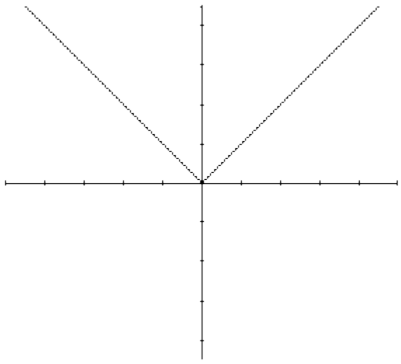
Usamos a hipótese

como queríamos provar.

A recíproca desse Teorema é falsa.

Para verificar esse fato, basta exibir um **contra-exemplo**: $f(x) = |x|$. Essa função é evidentemente **contínua em todo seu domínio**, em particular, em x=0. Entretanto, não é derivável na origem.

Temos: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ cujo gráfico é

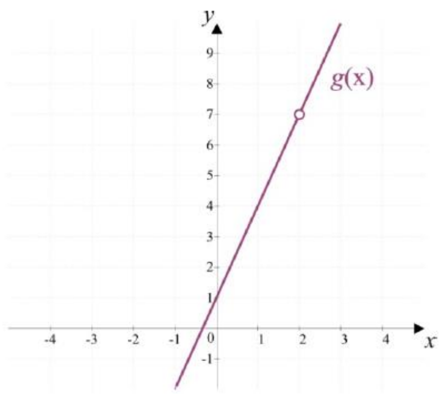


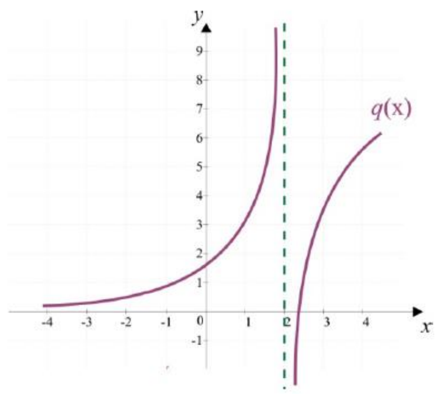
Observamos que $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e que não existe f'(0).

Por outro lado, f é contínua para todo x>0 ou x<0. Além disso, como 0 pertence ao domínio da função e $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$, temos que f é contínua também em x=0.

Explicando de outra forma:

Caso 1 – Considere os gráficos descritos a seguir.





Observe os gráficos g(x) e q(x) e verifique que são descontínuas, pois existe uma interrupção em x = 2 (uma "bolinha aberta" em g(x) e uma assíntota vertical em q(x)). Nesse caso, dizemos que as funções g(x) e q(x) são descontínuas em x = 2 (e apenas em x = 2). Assim, as funções g(x) e q(x) não estão definidas em x = 2 e, portanto, x = 2 não faz parte do Domínio. Nesse caso, escrevemos

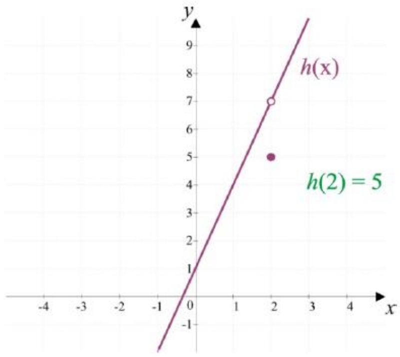
$$\nexists\, g(2) \;\; e \;\; \nexists\, q(2) \qquad \text{não existe } f(2) \text{ e não existe } q(2)$$

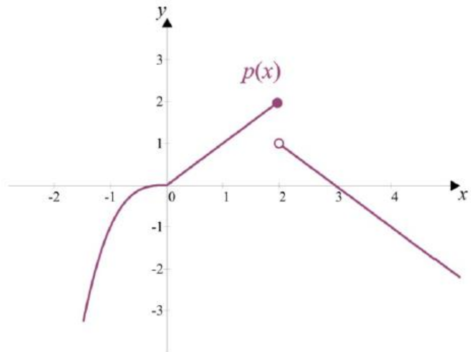
Observe ainda, que

$$\exists \lim_{x \to 2} g(x) = 7 \;\; \text{e} \;\; \nexists \lim_{x \to 2} q(x)$$

$$\begin{cases} \exists \lim_{x \to 2} g(x) = 7 \\ \nexists\, g(2) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \nexists \lim_{x \to 2} q(x) \\ \exists\, q(2) \end{cases}$$

Caso 2 – Considere os gráficos descritos a seguir.





Observe que as funções h(x) e p(x) são descontínuas, pois existe uma interrupção em x = 2 (as funções “dão um salto” em x = 2). Nesse caso, também dizemos que as funções h(x) e p(x) são descontínuas em x = 2 (e apenas em x = 2). Diferente do caso 1, as funções estão definidas em x = 2 e, portanto, x = 2 faz parte do Domínio. Escrevemos então:

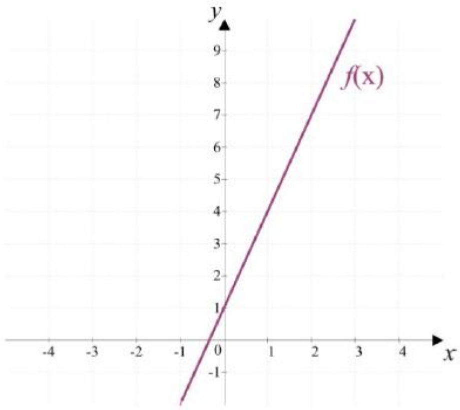
$$\exists\, h(2) = 5 \;\; e \;\; \exists\, p(2) = 2 \qquad \text{existe } h(2) \text{ e existe } p(2)$$

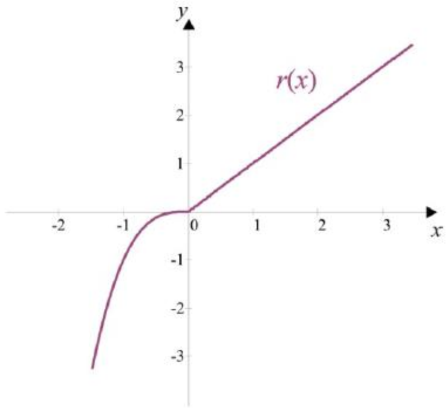
Observe ainda, que

$$\exists \lim_{x \to 2} h(x) = 7 \;\; \text{e} \;\; \nexists \lim_{x \to 2} p(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{x\to 2} h(x)=7 \\ \exists\, h(2)=5\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} h(x)\neq h(2) \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l}\nexists \lim\limits_{x\to 2} p(x) \\ \exists\, p(2)=2\end{array}\right.$$

Caso 3 – Considere os gráficos descritos a seguir.





As funções f(x) e r(x) são contínuas em x = 2 (e em qualquer outro valor de x), pois as funções não apresentam interrupção em x = 2 (e nem em nenhum outro valor de x). Nesse caso, dizemos que as funções f(x) e r(x) são contínuas para todo valor de x.

Observe o que acontece com o valor das funções em x = 2 e com o limite das funções quando x se aproxima de 2, para que se possa comparar com os casos anteriores em que as funções eram descontínuas em x = 2.

Você pode observar que

$$\exists\, f(2)=7 \;\text{ e }\; \exists\, r(2)=2 \qquad \text{existe } f(2) \text{ e existe } r(2)$$

Observando os gráficos de f(x) e r(x), podemos concluir que

$$\exists \lim_{x\to 2} f(x)=7 \;\text{ e }\; \exists \lim_{x\to 2} r(x)=2$$

Observando as expressões em destaque vemos que

$$\exists \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \qquad \text{e} \qquad \exists \lim_{x \to 2} r(x) = r(2)$$

o que não ocorria nos casos 1 e 2, nos quais as funções eram descontínuas.

Observação: Dizemos que uma função y = f(x) é contínua em um ponto x = a se a condição a seguir estiver satisfeita.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemplos:

1) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < e \\ \ln x & \text{se } x \geq e \end{cases}$$

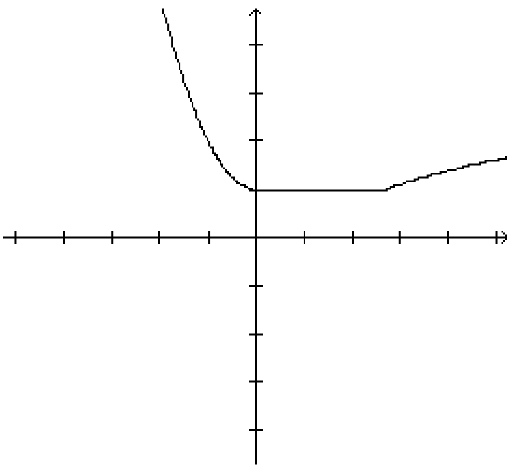
Mostre que f é **contínua** em todo ponto de seu domínio.

Solução:

Temos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < e \\ \ln x & \text{se } x \geq e \end{cases}$$

cujo gráfico é o seguinte:



Em primeiro lugar, observemos que Dom f=R.

Em segundo lugar, a função é claramente **contínua** em cada um dos três intervalos abertos onde foi definida por uma diferente expressão. De fato,

- para x<0, $f(x) = x^2 + 1$ é uma função contínua
- para 0<x<e, f(x)=1 é contínua
- para x>e, f(x)=ln x é contínua

Falta verificar o que acontece nos pontos x=0 e x=e.

- x=0

Temos f(0)=1 e $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ pois $\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (x^2 + 1) = 1$ e $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (1) = 1$.

Logo $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ e, portanto, f é contínua em x=0.

- x=e

Temos:

f(e)=ln e=1

e

$\lim_{x\to e} f(x) = 1$ pois

$\lim_{x\to e_-} f(x) = \lim_{x\to e_-} (1) = 1$ e $\lim_{x\to e_+} f(x) = \lim_{x\to e_+} (\ln x) = 1$.

Logo $\lim_{x\to e} f(x) = 1 = f(e)$ e, portanto, f é contínua em x=e.

Assim, a função f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

.
2) Invente uma função definida por partes - três ou quatro - como no exemplo anterior, que seja contínua no domínio.

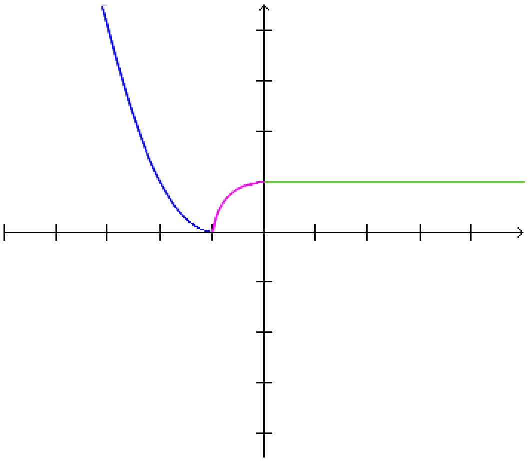
a) Construa seu gráfico.
b) Garanta a continuidade de sua função.

Solução:

Há uma infinidade de exemplos que podem ser criados. Uma possibilidade é a seguinte:

$$g(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{se } x<-1\\ x^3+1 & \text{se } -1\le x\le 0\\ 1 & \text{se } x>0\end{cases}$$

a) O gráfico de **g** é o seguinte:



O domínio da função é R. Graficamente podemos "desconfiar" do que está acontecendo, para depois formalizar nossas observações.

b)

$$g(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{se } x<-1\\ x^3+1 & \text{se } -1\le x\le 0\\ 1 & \text{se } x>0\end{cases}$$

A função é claramente contínua em cada um dos intervalos em que foi definida por uma diferente expressão. O problema acontece com os pontos de "emenda":

- x=–1

Temos: g(-1)=0

sendo que

$$\lim_{x\to -1_-} g(x)=\lim_{x\to -1_-}(x+1)^2=0$$

e

$$\lim_{x\to -1_+} g(x)=\lim_{x\to -1_+}(x^3+1)=0$$

o que garante que $\lim_{x \to -1} g(x) = 0 = g(-1)$, ou seja, g é contínua em x=–1.

- x=0

Temos: g(0)=1

sendo que

$$\lim_{x \to 0_-} g(x) = \lim_{x \to 0_-} (x^3 + 1) = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0_+} g(x) = \lim_{x \to 0_+} (1) = 1$$

o que garante que $\lim_{x \to 0} g(x) = 1 = g(0)$, ou seja, g é contínua em x=0.

Desse modo, g é contínua em todo o seu domínio.

3) Descubra condições sobre os parâmetros **a**, **b**, **c**, **m** e **n** para

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{se } x \le 1 \\ mx + n & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

que seja contínua em x=1.

Solução:

Pela maneira como foi definida a função, f(1) = a + b + c e, para que f seja contínua em x = 1, é necessário que a + b + c = m + n. Essa condição garante que $\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1_-} f(x) = f(1)$,isto é, f é contínua em x = 1.

Lembretes:

Dizemos que a função f é **contínua** no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

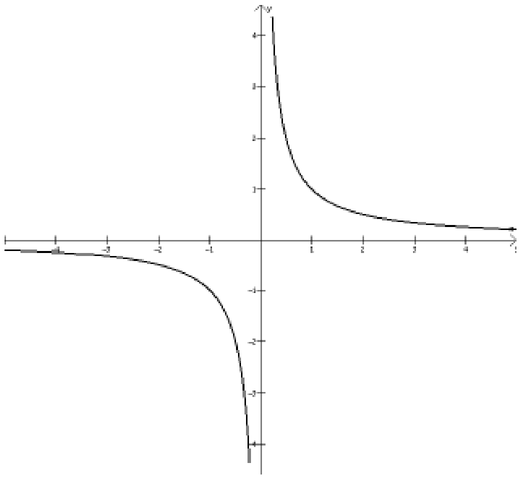
(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será **descontínua** em a.

4) Verifique a continuidade das funções abaixo, nos pontos indicados.

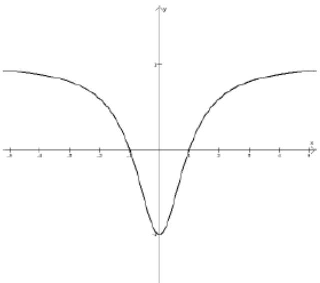
i) $f(x) = \frac{1}{x}$ **; x = 0.**

Solução:
(a) $\nexists$ *f*(0). Assim, a primeira condição de continuidade já não é satisfeita, o que implica que *f* não é contínua em *x* = 0. Observe a descontinuidade no gráfico.



ii) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **; x = – 1**

Solução:



(a) $\exists\, f(-1) = 0$;

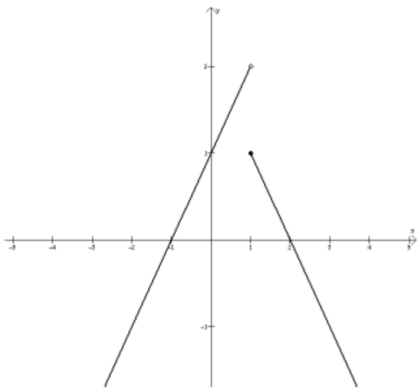
(b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 0$. Portanto, existe $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ e

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = f(-1)$. Logo, *f* é contínua em $x = -1$.

iii)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ 2-x, & x \geq 1 \end{cases} \quad ; \quad x = 1.$$

Solução:



$$(a) \exists \ f(1) = 1;$$

$$(b) \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} x+1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2-x = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \nexists \ \lim_{x \to 1} f(x);$$

Logo, f não é contínua em $x = 1$.

4.3-Continuidade de uma Função em um Intervalo

Uma função *f* é dita contínua em um intervalo aberto (*a*,*b*) se for contínua em todos os valores de *x* contidos neste intervalo. A função *f* é dita contínua no intervalo fechado [*a*,*b*] se for contínua no aberto (*a*,*b*) e, além disso, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Para verificar se uma função é contínua em um intervalo que contém infinitos elementos existem duas maneiras:

- Pode – se tomar um ponto genérico do intervalo, por exemplo, x_0, e verificar usando a definição, se f é contínua nesse ponto. Se for, será em todo o intervalo, uma vez que x_0 representa um ponto qualquer do intervalo em questão.
- Ou utilizar as propriedades válidas para continuidade apresentadas a seguir.

Propriedades:

1. Toda função polinomial é contínua em todos os reais.
2. Toda função racional (divisão de polinômios) é contínua em seu domínio.
3. As funções $f(x) = \text{sen}\,(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ são contínuas para todo número real x.
4. A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real x.
5. Se f e g são funções contínuas em um ponto a, então:

(i) f + g é contínua em a;

(*ii*) $f - g$ é contínua em a;

(*iii*) $f \times g$ é contínua em a;

(*iv*) f / g é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

6. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e g é contínua em a.

Então,

$$\lim_{x\to a} g[f(x)] = g\left[\lim_{x\to a} f(x)\right].$$

7.Se f é contínua em a e g é contínua em f(a), então a função composta gof é contínua em a.

8. Seja y = f(x) definida e contínua em um intervalo real I. Seja J= Im(f). Se f admite uma função inversa $f^{-1}: J \to I$, então f^{-1} é contínua em todos os pontos de J.

Observação: Devido a essa propriedade, a função f(x) = ln(x) é contínua em todo o seu domínio (R_+^*), uma vez que é a inversa da função exponencial, que é contínua.

Exemplos:

Investigue a continuidade das funções abaixo, ou seja, determine os pontos ou intervalos nos quais elas sejam contínuas ou descontínuas.

1. f(x) = tg(x)

A função $f(x)$ = tg(x) = sen(x)/cos(x) é o quociente de duas funções contínuas e, pela propriedade 4(iv), f é contínua em todos os pontos que não anulam o seu denominador, ou seja, no conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2.

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

f é uma função racional (quociente de duas funções polinomiais) e, portanto, contínua em seu domínio. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$ - {-2,2}.

3.

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 5}$$

f é a composta das funções $u(x) = x^4 + 5$ e $v(x) = \sqrt{x}$. u é uma função polinomial e, portanto, contínua; v é a inversa da função contínua $f(x) = x^2$ e, portanto, contínua em seu domínio. Como a composta de funções contínuas é uma função contínua em seu domínio, segue que f é contínua em seu domínio. Porém, $dom(f) = \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em todos os reais.

Resumindo:

Uma função f(x) é contínua no ponto x = a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, o limite da função para x tendendo a a é igual ao valor da função nesse ponto.

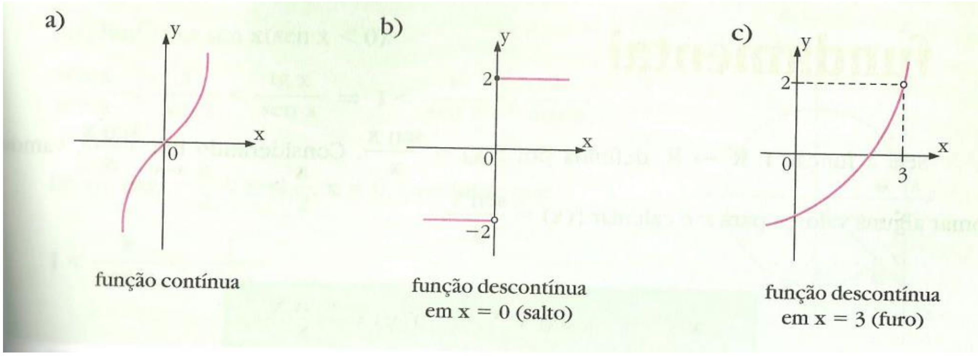
Para que uma função f(x) seja contínua em x = a, é necessário verificar

- a existência de f(a), definida num ponto x = a.
- a existência do $\lim_{x \to a} f(x)$.
- Se o limite $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

  A expressão “no ponto x = a” quer dizer “no ponto do gra´fico de abscissa igual a a”.

Se f:A→B é contínua para todo x Є A, diremos que f é contínua em A ou simplesmente f é contínua.

De modo geral, o gráfico de uma função contínua em um intervalo real, é representado por uma curva que não apresenta ponto de descontinuidade, isto é, não possui saltos e nem furos.



Exemplo:

Dada a função $f(x) = \begin{cases} x+1, se\ x < 3 \\ 4, se\ x > 3 \end{cases}$, verificar se existe algum ponto de descontinuidade.

Solução:

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 4 = 4 \quad e\ f(3\ ) = 4$, temos que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ o que indica que a função é contínua no ponto x = 3.

Para k ≤ 3, $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(x+1) = \lim_{x\to k} x + \lim_{x\to k} 1 = k+1\ e\ f(k) = k+1$

Para k > 3, $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k} 4 = 4$ e f(k) = 4

Então, f é contínua em R e não há ponto de descontinuidade.

Em geral, restringimos a análise aos valores de x que não verificam as condições de existência de f ou que "quebram" o domínio de f (nesse exemplo, x = 3).

Exercícios

Verifique a existência de algum ponto de descontinuidade nas seguintes funções.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ $x = 0$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3}$ $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x+6}$ $x = 2$ ou $x = 3$

d) $f(x) = x^3 - 1$ não possui

e) $f(x) = x^2 + x - 1$ não possui

4.4-Propriedade da Permanência de Sinal

Esta propriedade garante, por exemplo, que ao estudarmos os sinais de uma função contínua, com zeros isolados, definida em um dado intervalo, só haja eventuais mudanças de sinais em torno desses pontos. Isso ocorre, no caso de funções polinomiais.

Vamos partir de um exemplo, no qual a função indica a temperatura ao longo de um fio, para ilustrar esta importante propriedade das funções contínuas.

Exemplo:

Suponha que um fio de certo metal ocupa o intervalo [0,60] da reta real. A cada posição x Є [0,60], medida em centímetros, associamos T(x), a temperatura do fio neste ponto, medida em graus Celsius. Considerando que o metal é um meio que conduz calor com facilidade, como seria o gráfico de uma tal função? Segue uma possibilidade.

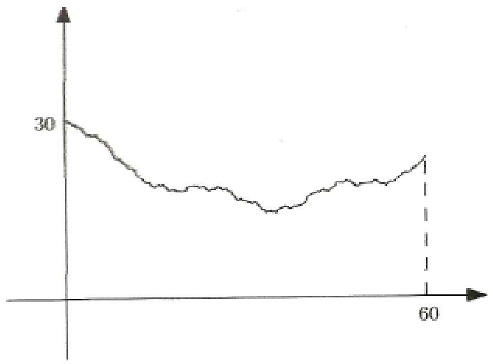


Gráfico da função temperatura T(x)

O gráfico sugere que uma pequena variação na posição corresponderá uma pequena variação na temperatura. Se a temperatura é alta em determinado ponto do fio, então esperamos que nos pontos próximos, a temperatura também seja alta.

Proposição: Permanência do sinal

Sejam f: D→R uma função e ɑ Є D tal que todo intervalo aberto contendo ɑ intersecta D – { ɑ }. Suponha que f seja contínua em ɑ e f(ɑ) > 0. Então, existe um número r > 0 tal que, ∀x Є (r - ɑ, ɑ + r) ∩ D, f(x) > 0.

Vamos supor, por absurdo, que para todo o número real $r > 0$, existe $x \in (a - r, a + r) \cap D$ tal que $f(x) \leq 0$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \cap D$ tal que $f(a_n) \leq 0$.

Assim construímos uma sequência de números (a_n) tais que $|a_n - a| < \frac{1}{n}$. Isso quer dizer que $\lim a_n = a$. No entanto, $f(a_n) \leq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

4.5-Propriedades das Funções Contínuas

As propriedades operatórias dos limites de funções, de alguma forma herdadas das propriedades dos limites de sequências, que dão praticidade aos cálculos, transparecem também na continuidade de funções.

Proposição: Operações com Funções

Sejam $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, $D \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $a \in D$, todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Se f e g são contínuas, então

i) $f + g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua;

ii) $f \cdot g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua;

iii) $\frac{f}{g} \colon D^* \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $D^* = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, é contínua.

Demonstração:

Seja $a \in D$ um elemento qualquer do domínio. Como f e g são contínuas,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f+g)(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) + g(a) = (f+g)(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a). \end{aligned}$$

Observe que, se $g(a) \neq 0$, a Propriedade da Permanência do Sinal garante a existência de algum $r > 0$ tal que, para todo $x \in (a-r, a+r) \cap D$, $g(x) \neq 0$. Mais uma vez,

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

4.6- Composição e Continuidade

Uma importante forma de obter funções a partir de funções dadas é a composição. Essa operação é diferente das operações apresentadas anteriormente, cujas definições dependiam fortemente das correspondentes operações dos números reais. De qualquer forma, a composição preserva a continuidade.

Proposição: Composição de funções contínuas

Sejam $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$, $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b = f(a) \in E$ tal que todo intervalo aberto contendo b intersecta $E \setminus \{b\}$. Suponhamos também que $f(D) \subset E$, de modo que podemos considerar $g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, a função composta. Se f é contínua em a e g é contínua em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em $a \in D$.

Demonstração:

Seja (x_n) uma sequência em D tal que $\lim x_n = a$. Considere (y_n) a sequência em E definida por $y_n = f(x_n)$. Como f é contínua em a,

$$\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a) = b.$$

Considere agora (z_n) a sequência definida por $z_n = g(y_n)$. Como g é contínua em b,

$$\lim z_n = \lim g(y_n) = g(b)$$

Mas $g(y_n)) = g(f(x_n)) = g \circ f(x_n)$ e $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$.

Concluímos que

$$\lim g \circ f(x_n) = g \circ f(a).$$

Isso quer dizer que

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g \circ f(a)$$

e, portanto, $g \circ f$ é contínua em $a \in D$.

Exemplo:

Determine se a função dada é contínua no pontoo indicado.

$f(x) = \begin{cases} 2 + sen\,(\pi x), se\ x \ \leq 2 \\ 2x - 2, se\ x > 2 \end{cases}$ no ponto 2.

Solução:

Temos $\lim_{x \to 2^-} 2 + sen\,(\pi x) = 2 + sen\,(2\pi) = 2$

f(2) = 2 + sen 2π = 2

$$\lim_{x \to +} 2x - 2 = 2(2) - 2 = 2$$

Então f é contínua em x = 2.

Lembretes: Propriedades dos Limites Infinitos

	Dados		Conclusão
P01	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$
P02	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty$
P.03	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = +\infty$
P.04	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = -\infty$
P.05	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = +\infty$
P.06	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = k \neq 0$	$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty, k>0 \\ -\infty, k<0 \end{cases}$
P.07	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = k \neq 0$	$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty, k<0 \\ -\infty, k>0 \end{cases}$
P.08	$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$		$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
P.09	$\lim_{x\to a} f(x) = 0$		$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$
P.10	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} (f-g)(x) = ?$
P.11	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} (f-g)(x) = ?$
P.12	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = ?$
P.13	$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = ?$
P.14	$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = ?$

Avaliação B_1

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do primeiro módulo.

Cursista: ____

1ª Questão: Calcular $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x-3}$.

2ª Questão: Dada a função $f(x) = \frac{x^3+x^2-12x}{x^2-3x}$, determine

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$

b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

c) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$

d) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$

3ª Questão: Calcule o seguinte limite: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-16}}{|x|}$.

4ª Questão: Calcule os limites abaixo.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

5ª Questão: Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)}{sen(x)}$.

Avaliação B_2

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do primeiro módulo.

Cursista:____

1ª Questão: Determinar.

a)$\lim_{x\to 0} \frac{sen4x}{4x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen6x}{2x}$

2ª Questão: Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{cox-1}{x^2}$

3ª Questão: Calcular.

a)$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2+x-3}{4x^2-2x+1}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x-1}{5x^2+\ x+1}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{9x^2+x-3}{x^4+x+5}$

4ª Questão: O $\lim_{x\to -3} \left[\frac{1}{x+3} + \frac{x+8}{x^2+x-6}\right]$ **tem valor igual a**

A) 4 **B)** $-\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{3}{5}$ **D)** $-\frac{5}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

5ª Questão: Determinar os seguintes limites.

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x+4}{x^3-2x}$